Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, **1**, No. 1 (2000), 111-123.
Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional.

Formulação LTS_N Bidimensional para o Problema de Ordenadas Discretas com Elevada Quadratura

E.B. HAUSER, PROMEC-UFRGS; Departamento de Matemática, PUCRS, Cx.P. 1429, 90619-900 Porto Alegre, RS, Brasil.

Resumo. Neste trabalho o método LTS_N nodal para determinar a solução da equação Bidimensional de transporte [7] é estendido para o problema de Ordenadas Discretas com altas ordens de quadratura.

1. Equações S_N Bidimensionais e a Obtenção de Dois Sistemas Lineares

Consideremos o problema de Ordenadas Discretas S_N em duas dimensões com coordenadas retângulares, espalhamento anisotrópico e um grupo de energia dado por

$$\mu_m \frac{\partial \Psi_m}{\partial x}(x,y)+\eta_m \frac{\partial \Psi_m}{\partial y}(x,y)+\sigma_t \Psi_m(x,y) = Q(x,y)+\sum_{n=1}^{M} w_n \Psi_n(x,y)\sigma_{smn}, \quad (1.1)$$

onde $\Psi_m(x,y)$ denota o fluxo angular de partículas na direção discreta $\Omega_m = (\mu_m, \eta_m)$ e w_m o respectivo peso na quadratura angular usada, para m=1,2, ...,M $M = \frac{N(N+2)}{2}$, $x\epsilon[0,a]$ e $y\epsilon[0,b]$. Ainda, σ_t é a seção de choque total e a seção de choque diferencial é expressa como

$$\sigma_{smn}(\mu_m, \mu_n) = \frac{1}{4\pi}\sum_{\ell=0}^{L}(2\ell+1)\sigma_s P_\ell(\mu_m)P_\ell(\mu_n).$$

As condições de contorno abrangem fluxo de entrada conhecido, reflexão especular e reflexão isotrópica.

Integrando ((1.1) com respeito a x entre os limites 0 e a e dividindo por a, resulta na equação unidimensional na variável y

$$\eta_m \frac{d\Psi_{my}}{dy}(y) + \frac{\mu_m}{a}[\Psi_m(a,y) - \Psi_m(0,y)] + \sigma_t \Psi_{my}(y) = Q_y(y)+\sum_{n=1}^{M} w_n \sigma_{smn}\Psi_{ny}(y), \quad (1.2)$$

onde, para m=1,2, ...,M, $\Psi_m(a,y)$ e $\Psi_m(0,y)$ são os fluxos angulares incidentes e emergentes dos contornos

$$Q_y(y) = \frac{1}{a}\int_0^a Q(x,y)dx \tag{1.3}$$

e o fluxo angular médio na direção discreta $\Omega_m = (\mu_m, \eta_m)$ é

$$\Psi_{my}(y) = \frac{1}{a}\int_0^a \Psi_m(x,y)dx. \tag{1.4}$$

Analogamente, integrando ((1.1) com respeito a y entre os limites 0 e b e dividindo por b, resulta na equação unidimensional na variável x

$$\mu_m \frac{d\Psi_{mx}}{dx}(x) + \frac{\eta_m}{b}\left[\Psi_m(x,b) - \Psi_m(x,0)\right] + \sigma_t \Psi_{mx}(x) = Q_x(x) + \sum_{n=1}^{M} w_n \sigma_{smn} \Psi_{nx}(x), \tag{1.5}$$

onde, para m=1,2, ...,M, $\Psi_m(x,b)$ e $\Psi_m(x,0)$ são os fluxos angulares incidentes e emergentes dos contornos

$$Q_x(x) = \frac{1}{b}\int_0^b Q(x,y)dy \tag{1.6}$$

e o fluxo angular médio na direção discreta $\Omega_m = (\mu_m, \eta_m)$ é

$$\Psi_{mx}(x) = \frac{1}{b}\int_0^b \Psi_m(x,y)dy. \tag{1.7}$$

2. Formulação LTS_N Bidimensional

Aplicando a Transformada de Laplace com respeito a y em ((1.2) e denotando $\pounds\left\{Q_y(y)\right\} = \overline{Q}_y(s)$ e $\pounds\left\{\Psi_{my}(y)\right\} = \overline{\Psi}_{my}(s)$, obtemos o sistema linear

$$\begin{aligned} \overline{\Psi}_{my}(s) + \frac{\sigma_t}{\eta_m}\overline{\Psi}_{my}(s) - \frac{1}{\eta_m}\sum_{n=1}^{M} w_n \sigma_s \overline{\Psi}_{ny}(s) \\ = \Psi_{my}(0) - \frac{\mu_m}{a\eta_m}\left[\overline{\Psi}_m(a,s) - \overline{\Psi}_m(0,s)\right] + \frac{\overline{Q}_y(s)}{\eta_m}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

representado matricialmente por

$$\overline{A}_y(s)\overline{\Psi}_y(s) = \overline{\Psi}_{y0}(s), \tag{2.2}$$

onde, para i = 1, 2, ..., M e j = 1, 2, ..., M, os elementos da matriz $\overline{A}_y(s)$, de ordem $M \times M$, têm a forma

$$a_y(i,j) = \begin{cases} s + \dfrac{\sigma_t - \sigma_{sii} w_i}{\eta_i} & se \quad i = j \\ \\ \dfrac{-\sigma_{sij} w_j}{\eta_j} & se \quad i \neq j \end{cases}, \tag{2.3}$$

o vetor das incógnitas é

$$\overline{\Psi}_y(s) = \left[\ \overline{\Psi}_{1y}(s)\ \overline{\Psi}_{2y}(s) \cdots \overline{\Psi}_{My}(s)\ \right]^T \tag{2.4}$$

e o vetor $\overline{\Psi}_{y0}(s)$ possui componentes genéricos

$$\overline{\Psi}_{y0}(i) = \Psi_{iy}(0) - \frac{\mu_i}{a\eta_i}\left[\ \overline{\Psi}_i(a,s) - \overline{\Psi}_i(0,s)\ \ \right] + \frac{\overline{Q}_y(s)}{\eta_i}. \tag{2.5}$$

Similarmente, aplicando a Transformada de Laplace com respeito a x em ((1.5) e denotando $\pounds\left\{Q_x(x)\right\} = \overline{Q}_x(s)$ e $\pounds\left\{\Psi_{mx}(x)\right\} = \overline{\Psi}_{mx}(s)$, obtemos o sistema linear

$$\begin{aligned} s\overline{\Psi}_{mx}(s) + \frac{\sigma_t}{\mu_m}\overline{\Psi}_{mx}(s) - \frac{1}{\mu_m}\sum_{n=1}^{M} w_n\sigma_s\overline{\Psi}_{nx}(s) \\ = \Psi_{mx}(0) - \frac{\eta_m}{a\mu_m}\left[\overline{\Psi}_m(s,b) - \overline{\Psi}_m(s,0)\right] + \frac{\overline{Q}_x(s)}{\mu_m}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

representado matricialmente por

$$\overline{A}_x(s)\overline{\Psi}_x(s) = \overline{\Psi}_{x0}(s), \tag{2.7}$$

onde, para i = 1, 2, ..., M e j = 1, 2, ..., M ,os elementos da matriz $\overline{A}_x(s)$, de ordem $M \times M$, têm a forma

$$a_x(i,j) = \begin{cases} s\ +\ \dfrac{\sigma_t - \sigma_{sii}w_i}{\mu_i} & se\quad i = j \\ \\ \dfrac{-\sigma_{sij}w_j}{\mu_i} & se\quad i \neq j \end{cases}, \tag{2.8}$$

onde o vetor das incógnitas é

$$\overline{\Psi}_x(s) = \left[\ \overline{\Psi}_{1x}(s)\ \overline{\Psi}_{2x}(s) \cdots \overline{\Psi}_{Mx}(s)\ \right]^T \tag{2.9}$$

e o vetor $\overline{\Psi}_{y0}(s)$ possui componentes genéricas

$$\overline{\Psi}_{x0}(i) = \Psi_{ix}(0) - \frac{\eta_i}{b\mu_i}\left[\ \overline{\Psi}_i(s,b) - \overline{\Psi}_i(s,0)\ \right] + \frac{\overline{Q}_x(s)}{\mu_i}. \tag{2.10}$$

As soluções dos sistemas ((2.2) e ((2.7) são dadas, respectivamente, por:

$$\overline{\Psi}_y(s) = \overline{A}_y^{-1}(s)\overline{\Psi}_{y0}(s) \tag{2.11}$$

e

$$\overline{\Psi}_x(s) = \overline{A}_x^{-1}(s)\overline{\Psi}_{x0}(s). \tag{2.12}$$

Observamos que as matrizes $\overline{A}_y(s)$ e $\overline{A}_x(s)$, apresentam a mesma estrutura da matriz LTSN unidimensional

$$\overline{A}_y(s) = sI + A$$

e

$$\overline{A}_x(s) = sI + B.$$

As matrizes inversas, de ordem M, $\overline{A}_y^{-1}(s)$ e $\overline{A}_x^{-1}(s)$, são calculadas aplicando a decomposição de Schur nas matrizez A e B, método do particionamento para inversão de matrizes bloco e recursividade [8].

Encontradas as matrizes inversas $\overline{A}_y^{-1}(s)$ e $\overline{A}_x^{-1}(s)$, obtem-se as expressões para os fluxos angulares médios transformadas em termos dos fluxos angulares nos contornos do domínio e dos fluxos angulares médios. Os fluxos angulares são então obtidos aplicando a Transformada Inversa de Laplace combinada com o Teorema da Convolução e técnica de Expansão de Heaviside, ou seja,

$$\Psi_y(y) = \pounds^{-1}\left\{\overline{\Psi}_y(s)\right\} = \pounds^{-1}\left\{\overline{A}_y^{-1}(s)\overline{\Psi}_{y0}(s)\right\} = H_y * \Psi_{y0} \tag{2.13}$$

e

$$\Psi_x(x) = \pounds^{-1}\left\{\overline{\Psi}_x(s)\right\} = \pounds^{-1}\left\{\overline{A}_x^{-1}(s)\overline{\Psi}_{x0}(s)\right\} = H_x * \Psi_{x0}, \tag{2.14}$$

com

$$H_y = \pounds^{-1}\left\{\overline{A}_y^{-1}(s)\right\}$$

e

$$H_x = \pounds^{-1}\left\{\overline{A}_x^{-1}(s)\right\}.$$

Como as equações ((2.1) e ((2.6) representam equações unidimensionais na variável y e x respectivamente, temos que as raízes, s_k e r_k, dos determinantes das matrizes $\overline{A}_y(s)$ e $\overline{A}_x(s)$ são simples. Logo H_y e H_x calculadas através da técnica de Expansão de Heaviside tem a forma

$$H_y = \sum_{k=1}^{M} P_{yk} e^{s_k y}, \tag{2.15}$$

$$H_x = \sum_{k=1}^{M} P_{xk} e^{r_k x}, \tag{2.16}$$

onde

$$P_{yk} = \left[\frac{Adj(\overline{A}_y(s))}{\frac{d}{ds}det(\overline{A}_y(s))}\right]_{s=s_k} \tag{2.17}$$

e

$$P_{xk} = \left[\frac{Adj(\overline{A}_x(s))}{\frac{d}{ds}det(\overline{A}_x(s))}\right]_{s=r_k} \tag{2.18}$$

são matrizes de ordem M obtidas da inversão da transformada de Laplace. Observando que as exponenciais $e^{s_k y}$ e $e^{r_k x}$ constituem uma base de dimensão M para as equações ((1.2) e ((1.5), escrevemos os fluxos angulares médios e os fluxos angulares transversos na fronteira como combinações lineares dos elementos dessa base.

A determinação de todos os fluxos angulares reduz-se ao cálculo de

$$4M^2 = N^4 + 4N^3 + 4N^2$$

coeficientes e assim estará determinada explicitamente a solução do problema. Para tanto, resolve-se um sistema linear compatível de $4M^2$ equações, das quais 2M são obtidas utilizando a definição dos fluxos angulares médios em x=a e y=b,

$$\Psi_{mx}(a) = \frac{1}{a}\int_0^b \Psi_m(a,y)dy \tag{2.19}$$

e

$$\Psi_{my}(b) = \frac{1}{b}\int_0^a \Psi_m(x,b)dx \tag{2.20}$$

e 2M equações são obtidas aplicando as condições de contorno em x=a e y=b nas equações ((2.13) e ((2.14),

$$\Psi_x(a) = \left[\pounds^{-1}\left\{\overline{A}_x^{-1}(s)\right\} * \Psi_{x0}\right]_{x=a}, \tag{2.21}$$

$$\Psi_y(b) = \left[\pounds^{-1}\left\{\overline{A}_y^{-1}(s)\right\} * \Psi_{y0}\right]_{y=b}. \tag{2.22}$$

As demais $4M^2 - 4M$ equações necessárias são obtidas usando a propriedade de diferenciabilidade das seguintes soluções encontradas:

$$\left[\frac{d^k}{dx^k}\Psi_x\right]_{x=a} = \left[\frac{d^k}{dx^k}\left(H_x * \Psi_{x0}\right)\right]_{x=a}, \tag{2.23}$$

$$\left[\frac{d^k}{dy^k}\Psi_y\right]_{y=b} = \left[\frac{d^k}{dy^k}\left(H_y * \Psi_{y0}\right)\right]_{y=b}. \tag{2.24}$$

3. Formulação LTS_N Bidimensional Para Elevada Ordem de Quadratura

O comportamento exponencial da solução, combinado com o fato de que, em módulo, r^k e s^k aumentam com N, implicam que a formulação LTS_N Bidimensional na forma proposta acima não é apropriada para resolver problemas de transporte de que exigem elevada ordem de quadratura e para obtenção de melhor exatidão de resultados numéricos. Para superar essa dificuldade, faremos uma modificação na base, de dimensão M, do espaço da solução.

Consideramos as M s^k raízes de $det(\overline{A}_y(s))$ dispostas na forma

$$s^k < 0 \;\; se \;\; k = 1, 2, ... \frac{M}{2}$$

e

$$s^k > 0 \;\; se \;\; k = \frac{M}{2} + 1, ..., M$$

e também as M r^k raízes de $det(\overline{A}_x(s))$,

$$r^k < 0 \;\; se \;\; k = 1, 2, ... \frac{M}{2}$$

e

$$r^k > 0 \ \ se \ \ k = \frac{M}{2} + 1, ..., M.$$

As matrizes ((2.15) e ((2.16) são reescritas como

$$H_y = \sum_{k=1}^{\frac{M}{2}} P_{yk} e^{s_k y} \ \ + \sum_{k=\frac{M}{2}+1}^{M} P_{yk} e^{s_k y}, \tag{3.1}$$

$$H_x = \sum_{k=1}^{\frac{M}{2}} P_{xk} e^{r_k x} \ \ + \sum_{k=\frac{M}{2}+1}^{M} P_{xk} e^{r_k x}. \tag{3.2}$$

O fluxo angular com respeito à variável y, para $0 < y < b$, é escrito na forma

$$\Psi_y(y) = \int_0^y \sum_{k=1}^{\frac{M}{2}} P_{yk} e^{s_k (y-\xi)} \left[\Psi_{y0}\right]_{y=\xi} d\xi \ \ + \int_b^y \sum_{k=\frac{M}{2}+1}^{M} P_{yk} e^{s_k (y-\xi)} \left[\Psi_{y0}\right]_{y=\xi} d\xi. \tag{3.3}$$

O fluxo angular com respeito à variável x, com $0 < x < a$, é escrito como

$$\Psi_x(x) = \int_0^x \sum_{k=1}^{\frac{M}{2}} P_{xk} e^{r_k (x-\xi)} \left[\Psi_{x0}\right]_{x=\xi} d\xi \ \ + \int_a^x \sum_{k=\frac{M}{2}+1}^{M} P_{xk} e^{r_k (x-\xi)} \left[\Psi_{x0}\right]_{x=\xi} d\xi \tag{3.4}$$

Os fluxos angulares médios e os fluxos angulares transversos (na fronteira), são expressos com função dos elementos das bases, constituidas por $e^{r_k x}$ e $e^{s_k y}$, para $m = 1, 2, ..., M$,

$$\Psi_{mx}(x) = \sum_{i=1}^{\frac{M}{2}} \left[A_{mi} e^{r_i x} + A_{m\left(i+\frac{M}{2}\right)} e^{r_{i+\frac{M}{2}} (x-a)} \right], \tag{3.5}$$

$$\Psi_{my}(y) = \sum_{i=1}^{\frac{M}{2}} \left[B_{mi} e^{s_i y} + B_{m\left(i+\frac{M}{2}\right)} e^{s_{i+\frac{M}{2}} (y-b)} \right], \tag{3.6}$$

$$\Psi_m(x,0) = \sum_{i=1}^{\frac{M}{2}} \left[C_{mi} e^{r_i x} + C_{m\left(i+\frac{M}{2}\right)} e^{r_{i+\frac{M}{2}} (x-a)} \right], \tag{3.7}$$

$$\Psi_m(0,y) = \sum_{i=1}^{\frac{M}{2}} \left[D_{mi} e^{s_i y} + D_{m\left(i+\frac{M}{2}\right)} e^{s_{i+\frac{M}{2}} (y-b)} \right], \tag{3.8}$$

$$\Psi_m(x,b) = \sum_{i=1}^{\frac{M}{2}} \left[E_{mi} e^{r_i x} + E_{m\left(i+\frac{M}{2}\right)} e^{r_{i+\frac{M}{2}} (x-a)} \right], \tag{3.9}$$

$$\Psi_m(a,y) = \sum_{i=1}^{\frac{M}{2}} \left[F_{mi} e^{s_i y} + F_{m\left(i+\frac{M}{2}\right)} e^{s_{+\frac{M}{2}i}(y-b)} \right]. \tag{3.10}$$

Levando as expressões ((3.7), ((3.8), ((3.10) na Transformada de Laplace inversa de (2.5, usando ((1.3) e ((1.4) e posteriormente substituindo no lado direito de ((3.3), obtem-se o vetor convolução

$$H_y * \Psi_{y0} = [\ CONV_{y1}\ CONV_{y2} \cdots CONV_{yM}\ ]^T, \tag{3.11}$$

onde, considerando para $t = i + \frac{M}{2}$, i = 1, 2, ..., $\frac{M}{2}$

$$f_1(r_i) = \frac{e^{ar_i} - 1}{r_i}, \tag{3.12}$$

$$f_2(r_t) = \frac{1 - e^{-ar_t}}{r_t}, \tag{3.13}$$

os elementos de ((3.11), para $k = 1, 2, ..., M$, tem a forma

$$CONV_{yk} = \sum_{i=1}^{\frac{M}{2}} \frac{1}{a} \left[P_y^i \left[W_{y1} + W_{y2}\right] + P_y^{i+\frac{M}{2}} \left[W_{y3} + W_{y4}\right] \right], \tag{3.14}$$

com

$$W_{y1} = \sum_{i=1}^{\frac{M}{2}} \left[\begin{array}{l} C_{ki} f_1(r_i) \dfrac{e^{ys_i} - 1}{s_i} + C_{kt} f_2(r_t) \dfrac{e^{ys_t} - 1}{s_t} \\ -\dfrac{\mu_i}{\eta_i} \left[F_{ki} e^{ys_i} + F_{kt} y e^{(y-b)s_t} - D_{ki} y e^{ys_i} - D_{kt} y e^{(y-b)s_t} \right] \end{array} \right], \tag{3.15}$$

$$W_{y2} = \frac{1}{\eta_i} \int_0^y \left[e^{(y-\xi)s_i} \int_0^a Q(x,\xi) dx \right] d\xi, \tag{3.16}$$

$$W_{y3} = \sum_{i=1}^{\frac{M}{2}} \left[\begin{array}{l} C_{ki} f_1(r_i) \dfrac{e^{(y-b)s_i} - 1}{s_i} + C_{kt} f_2(r_t) \dfrac{e^{(y-b)s_t} - 1}{s_t} \\ -\dfrac{\mu_i}{\eta_i} \left[\begin{array}{l} F_{ki(y-b)} e^{ys_i} + F_{kt}(y-b) e^{(y-b)s_t} \\ -D_{ki}(y-b) e^{ys_i} - D_{kt}(y-b) e^{(y-b)s_t} \end{array} \right] \end{array} \right], \tag{3.17}$$

$$W_{y4} = \frac{1}{\eta_i} \int_b^y \left[e^{(y-\xi)s_i} \int_0^a Q(x,\xi) dx \right] d\xi. \tag{3.18}$$

Substituindo as expressões ((3.7), ((3.8), ((3.9) na Transformada de Laplace inversa de ((2.10), usando ((1.6) e ((1.7) e posteriormente substituindo no lado direito de ((3.4), obtem-se o vetor convolução

$$H_x * \Psi_{x0} = [\ CONV_{x1}\ CONV_{x2} \cdots CONV_{xM}\ ]^T, \tag{3.19}$$

onde, considerando para $t = i + \frac{M}{2}$, i = 1, 2, ..., $\frac{M}{2}$,

$$g_1(s_i) = \frac{e^{bs_i} - 1}{s_i}, \tag{3.20}$$

$$g_2(s_t) = \frac{1 - e^{-bs_t}}{s_t}, \tag{3.21}$$

os elementos de ((3.19), para $k = 1, 2, ..., M$, tem a forma

$$CONV_{xk} = \sum_{i=1}^{\frac{M}{2}} \frac{1}{a} \left[P_x^i \left[W_{x1} + W_{x2} \right] + P_x^{i+\frac{M}{2}} \left[W_{x3} + W_{x4} \right] \right], \tag{3.22}$$

com

$$W_{x1} = \sum_{i=1}^{\frac{M}{2}} \left[\begin{array}{l} D_{ki} g_1(s_i) \dfrac{e^{xr_i} - 1}{r_i} + D_{kt} g_2(r_t) \dfrac{e^{xr_t} - 1}{r_t} \\ -\dfrac{\eta_i}{\mu_i} \left[E_{ki} e^{xr_i} + E_{kt} x e^{(x-a)r_t} - C_{ki} x e^{xr_i} - C_{kt} x e^{(x-a)r_t} \right] \end{array} \right], \tag{3.23}$$

$$W_{x2} = \frac{1}{\mu_i} \int_0^x \left[e^{(x-\xi)r_i} \int_0^b Q(\xi, y) dy \right] d\xi, \tag{3.24}$$

$$W_{x3} = \sum_{i=1}^{\frac{M}{2}} \left[\begin{array}{l} D_{ki} g_1(s_i) \dfrac{e^{(x-a)r_i} - 1}{r_i} + D_{kt} g_2(s_t) \dfrac{e^{(x-a)r_t} - 1}{r_t} \\ -\dfrac{\mu_i}{\eta_i} \left[\begin{array}{l} E_{ki(x-a)} e^{xr_i} + E_{kt}(x-a) e^{(x-a)r_t} \\ -C_{ki}(x-a) e^{xr_i} - C_{kt}(x-a) e^{(x-a)r_t} \end{array} \right] \end{array} \right] \tag{3.25}$$

$$W_{x4} = \frac{1}{\mu_i} \int_a^x \left[e^{(x-\xi)s_i} \int_0^b Q(\xi, y) dy \right] d\xi. \tag{3.26}$$

4. Construção do Sistema Linear Esparso que Permite o Cálculo das Incógnitas

Nesta seção, a partir da aplicação das condições de contorno, construimos o sistema linear de $4M^2$ equações lineares, cujas $4M^2$ incógnitas são os coeficientes a serem determinados em (3.5) a (3.10).

Para tanto, nas equações abaixo, $VL, L = 1, 2, 3, ..., 20$, representa uma matriz coluna de ordem M

$$VL = [\ VL_1\ VL_2 \cdots VL_M\ ]^T. \tag{4.27}$$

As primeiras M equações são obtidas substituindo (3.5) (com x=a) e (3.10) em (2.20) e as representamos sinteticamente por

$$\overrightarrow{V1} = \overrightarrow{0}, \tag{4.28}$$

onde $\overrightarrow{V1} = [\ V1_1\ V1_2 \cdots V1_M\ ]^T$, k = 1, 2, ..., M, $t = i + \frac{M}{2}$ e i = 1, 2, ..., $\frac{M}{2}$,

$$V1_k = \sum_{i=1}^{\frac{M}{2}} \left(A_{ki} b e^{r_i a} + A_{kt} b - F_{ki} g_1(s_i) - F_{kt} g_2(s_t) \right), \tag{4.29}$$

com g_1 e g_2 especificados em (3.20) e (3.21).

Ao substituir (3.6) (com y=b) e (3.9) em (2.19) são geradas mais M equações

$$\overrightarrow{V2} = \overrightarrow{0}, \tag{4.30}$$

onde $\overrightarrow{V2} = [\ V2_1\ \ V2_2 \cdots V2_M\ ]^T$, k = 1, 2, ..., M, $t = i + \frac{M}{2}$ e i = 1, 2, ..., $\frac{M}{2}$,

$$V2_k = \sum_{i=1}^{\frac{M}{2}} \left(B_{ki} a e^{s_i b} + B_{kt} a - E_{ki} f_1(r_i) E_{kt} f_2(r_t) \right), \tag{4.31}$$

com f_1 e f_2 dados em (3.12) e (3.13).

A substituição de (3.5) e (3.11) em (2.21) produz M equações

$$\overrightarrow{V3} - \sum_{i=1}^{\frac{M}{2}} \left[P_{xi} \overrightarrow{V4} \right] = - \sum_{i=1}^{\frac{M}{2}} \left[P_{xi} \overrightarrow{V5} + P_{x\left(i+\frac{M}{2}\right)} \overrightarrow{V6} \right], \tag{4.32}$$

onde para g_1 e g_2 discriminados em (3.20) e (3.21), $k = 1, 2, ..., M$, $t = i + \frac{M}{2}$ e $i =$, $1, 2, ..., \frac{M}{2}$ e $L = 3, 4, 5, 6$ os elementos genéricos de $\overrightarrow{VL} = [\ VL_1\ \ VL_2 \cdots VL_M\ ]^T$,

$$V3_k = \sum_{i=1}^{\frac{M}{2}} b \left(A_{ki} e^{r_i a} + A_{kt} \right), \tag{4.33}$$

$$V4_k = \sum_{i=1}^{\frac{M}{2}} \left[\begin{array}{c} D_{ki} g_1(s_i) \dfrac{e^{a r_i} - 1}{r_i} + D_{kt} g_2(s_t) \dfrac{e^{a r_t} - 1}{r_t} \\ -\dfrac{a \eta_i}{\mu_i} \left[E_{ki} e^{a r_i} + E_{kt} - C_{ki} e^{a r_i} - C_{kt} \right] \end{array} \right]. \tag{4.34}$$

Os elementos de $V4_K$ e $V5_k$ ficam especificados ao fazermos x = a no lado direito de (3.24) e (3.26).

Substituindo (3.6) e (3.19) em (2.22) criamos mais M equações

$$\overrightarrow{V7} - \sum_{i=1}^{\frac{M}{2}} \left[P_{yi} \overrightarrow{V8} \right] = - \sum_{i=1}^{\frac{M}{2}} \left[P_{yi} \overrightarrow{V9} + P_{y\left(i+\frac{M}{2}\right)} \overrightarrow{V10} \right], \tag{4.35}$$

onde, para g_1 e g_2 especificados em (3.12) e (3.13), $k = 1, 2, ..., M$, $t = i + \frac{M}{2}$ e $i =$ $1, 2, ..., \frac{M}{2}$ e $L = 7, 8, 9, 10$, os elementos genéricos de $\overrightarrow{VL} = [\ VL_1\ \ VL_2 \cdots VL_M\ ]^T$,

$$V7_k = \sum_{i=1}^{\frac{M}{2}} a \left(B_{ki} e^{s_i b} + B_{kt} \right), \tag{4.36}$$

$$V8_k = \sum_{i=1}^{\frac{M}{2}} \left[\begin{array}{l} C_{ki} f_1(r_i) \dfrac{e^{bs_i} - 1}{s_i} + C_{kt} f_2(r_t) \dfrac{e^{bs_t} - 1}{s_t} \\ -\dfrac{b\mu_i}{\eta_i} \left[F_{ki} e^{bs_i} + F_{kt} - D_{ki} e^{bs_i} - D_{kt} \right] \end{array} \right]. \tag{4.37}$$

Fazendo $y = a$ no lado direito de (3.16) e (3.18) os elementos de $V9_K$ e $V10_k$ são especificados.

Geramos as últimas $2M^2 - 4M$ equações necessárias derivando (3.22) com respeito a x, n vezes, $n = 1, 2, ..., 2M^2 - 2M$ e fazendo $x = a$, obtemos

$$\overrightarrow{V11} - \sum_{i=1}^{\frac{M}{2}} \left[P_{xi} \overrightarrow{V12} + P_{x(i+\frac{M}{2})} \overrightarrow{V13} + \right] = - \sum_{i=1}^{\frac{M}{2}} \left[P_{xi} \overrightarrow{V14} + P_{x(i+\frac{M}{2})} \overrightarrow{V15} \right], \tag{4.38}$$

onde para g_1 e g_2 especificados em (3.20) e (3.21), $k = 1, 2, ..., M$, $t = i + \frac{M}{2}$ e $i = 1, 2, ..., \frac{M}{2}$ e $L = 11, 12, 13, 14, 15$, os elementos genéricos de $\overrightarrow{VL} = [\ VL_1\ VL_2 \cdots VL_M\ ]^T$ são

$$V11_k = \sum_{i=1}^{\frac{M}{2}} b \left(A_{ki} r_i^n e^{r_i a} + A_{kt} r_t^n \right), \tag{4.39}$$

$$V12_k = \sum_{i=1}^{\frac{M}{2}} \left[\begin{array}{l} D_{ki} g_1(s_i) r_i^{n-1} e^{ar_i} + D_{kt} g_2(s_t) r_t^{n-1} e^{ar_t} \\ -\dfrac{\eta_i}{\mu_i} \left[[E_{ki} - C_{ki}] \left[(ar_i + n) r_i^{n-1} e^{ar_i} \right] + [E_{kt} - C_{kt}] \left[(ar_t + n) r_t^{n-1} \right] \right] \end{array} \right], \tag{4.40}$$

$$V13_k = \sum_{i=1}^{\frac{M}{2}} \left[\begin{array}{l} D_{ki} g_1(s_i) r_i^{n-1} + D_{kt} g_2(s_t) r_t^{n-1} \\ -\dfrac{\eta_i}{\mu_i} \left[[E_{ki} - C_{ki}]\, n r_i^{n-1} e^{ar_i} + [E_{kt} - C_{kt}]\, n r_t^{n-1} \right] \end{array} \right], \tag{4.41}$$

$$V14_k = \left[\frac{1}{\mu_i} \frac{d}{dx} \left[\int_0^x \left[e^{(x-\xi) r_i} \int_0^b Q(\xi, y) dy \right] d\xi \right] \right]_{x=a}, \tag{4.42}$$

$$V15_k = \left[\frac{1}{\mu_i} \frac{d}{dx} \left[\int_a^x \left[e^{(x-\xi) r_i} \int_0^b Q(\xi, y) dy \right] d\xi \right] \right]_{x=a}. \tag{4.43}$$

Derivando (3.14) com respeito a y, n vezes, $n = 1, 2, ..., 2M^2 - 2M$ e a posterior substituição de x por a, construimos $2M^2 - 2M$ equações da forma

$$\overrightarrow{V16} - \sum_{i=1}^{\frac{M}{2}} \left[P_{yi} \overrightarrow{V17} + P_{y(i+\frac{M}{2})} \overrightarrow{V18} + \right] = - \sum_{i=1}^{\frac{M}{2}} \left[P_{yi} \overrightarrow{V19} + P_{y(i+\frac{M}{2})} \overrightarrow{V20} \right], \tag{4.44}$$

onde para f_1 e f_2 especificados em (3.12 e (3.13), $k = 1, 2, ..., M$, $t = i + \frac{M}{2}$ e $i = 1, 2, ..., \frac{M}{2}$ e $L = 16, 17, 18, 19, 20$, os elementos genéricos de $\overrightarrow{VL} = [\ VL_1\ VL_2 \cdots VL_M\ ]^T$, são

$$V16_k = \sum_{i=1}^{\frac{M}{2}} a \left(BA_{ki} s_i^n e^{s_i b} + B_{kt} s_t^n \right), \tag{4.45}$$

$$V17_k = \sum_{i=1}^{\frac{M}{2}} \left[\begin{array}{l} C_{ki} f_1(r_i) s_i^{n-1} e^{bs_i} + C_{kt} f_2(r_t) s_t^{n-1} e^{bs_t} \\ -\frac{\mu_i}{\eta_i} \left[[F_{ki} - D_{ki}] \left[(as_i + n) s_i^{n-1} e^{bs_i} \right] + [F_{kt} - D_{kt}] \left[(bs_t + n) s_t^{n-1} \right] \right] \end{array} \right], \tag{4.46}$$

$$V18_k = \sum_{i=1}^{\frac{M}{2}} \left[\begin{array}{l} C_{ki} f_1(r_i) s_i^{n-1} + C_{kt} f_2(r_t) s_t^{n-1} \\ -\frac{\mu_i}{\eta_i} \left[[F_{ki} - D_{ki}] \, n s_i^{n-1} e^{bs_i} + [F_{kt} - D_{kt}] \, n s_t^{n-1} \right] \end{array} \right], \tag{4.47}$$

$$V19_k = \left[\frac{1}{\eta_i} \frac{d}{dy} \left[\int_0^y \left[e^{(y-\xi)s_i} \int_0^a Q(x, \xi) dx \right] d\xi \right] \right]_{y=b}. \tag{4.48}$$

$$V20_k = \left[\frac{1}{\eta_i} \frac{d}{dy} \left[\int_b^y \left[e^{(y-\xi)s_i} \int_0^a Q(x, \xi) dx \right] d\xi \right] \right]_{y=b} \tag{4.49}$$

5. Considerações Finais

As equações (4.28), (4.30), (4.32), (4.35), (4.38) e (4.44) acima discriminadas, constituem o sistema linear esparso, de $4M^2$ equações

$$\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{V1} = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{V2} = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{V3} - \sum_{i=1}^{\frac{M}{2}} \left[P_{xi} \overrightarrow{V4} \right] = - \sum_{i=1}^{\frac{M}{2}} \left[P_{xi} \overrightarrow{V5} + P_{x\left(i+\frac{M}{2}\right)} \overrightarrow{V6} \right] \\ \overrightarrow{V7} - \sum_{i=1}^{\frac{M}{2}} \left[P_{yi} \overrightarrow{V8} \right] = - \sum_{i=1}^{\frac{M}{2}} \left[P_{yi} \overrightarrow{V9} + P_{y\left(i+\frac{M}{2}\right)} \overrightarrow{V10} \right] \\ \overrightarrow{V11} - \sum_{i=1}^{\frac{M}{2}} \left[P_{xi} \overrightarrow{V12} + P_{x(i+\frac{M}{2})} \overrightarrow{V13} + \right] = - \sum_{i=1}^{\frac{M}{2}} \left[P_{xi} \overrightarrow{V14} + P_{x(i+\frac{M}{2})} \overrightarrow{V15} \right] \\ \overrightarrow{V16} - \sum_{i=1}^{\frac{M}{2}} \left[P_{yi} \overrightarrow{V17} + P_{y(i+\frac{M}{2})} \overrightarrow{V18} + \right] = - \sum_{i=1}^{\frac{M}{2}} \left[P_{yi} \overrightarrow{V19} + P_{y(i+\frac{M}{2})} \overrightarrow{V20} \right] \end{array} \right. \tag{5.50}$$

cuja solução constitui os valores dos coeficientes de (3.5) a (3.10). Sem utilizar apro-ximações obtemos expressões analíticas para os fluxos angulares médios e para os fluxos angulares no contorno do domínio.

Como sequência do presente trabalho, resultados numéricos serão apresentados futuramente para problema em uma placa, com fonte em um dos seus vértices, cujas condições de contorno são de vácuo em $x = a$ e $y = b$

$$\Psi_{\frac{M}{4}+k}(a, y) = 0 \text{ e } \Psi_{\frac{M}{2}+k}(x, b) = 0 \text{ para } k = 1, 2, ..., \frac{M}{2}$$

e reflexão especular em $x = 0$ e $y = 0$

$$\begin{aligned} \Psi_k(0, y) &= \Psi_{\frac{M}{2}-k+1}(0, y) \quad k = 1, 2, ..., \tfrac{M}{4}; \\ \Psi_{M-k+1}(0, y) &= \Psi_{\frac{M}{2}+k}(0, y) \quad k = 1, 2, ..., \tfrac{M}{4}; \\ \Psi_k(x, 0) &= \Psi_{M-k+1}(x, 0) \quad k = 1, 2, ..., \tfrac{M}{2}. \end{aligned}$$

para o qual existem resultados disponíveis na literatura para comparação.

Enfatizamos que a convergência do Método LTS_N para problemas bidimensionais foi provada por [11].

Referências

[1] L.B.Barichello, M.T.B. Vilhena, A New Analytical Approach to Solve the Neutron Transport Equation, *Kerntechnik*, **56** (1991), 334-336.

[2] L.B. Barichello, M.T.B. Vilhena, A General Approach to One-Group One-Dimensional Transport Equation, *Kerntechnik*, **58** (1993), 182-184.

[3] A.V. Cardona, M.T.B. Vilhena, A Solution of The Linear Transport Equation Using Walsh Function and Laplace Transform, *Annals of Nuclear Energy* , **8** (1994), 495-505.

[4] A.V. Cardona, M.T.B. Vilhena, A Solution of The Linear Transport Equation Using Chebyshev Polynomials and Laplace Transform, *Kerntechnik*, **59** (1994), 278-281.

[5] A.V. Cardona, M.T.B. Vilhena, Generalização da Solução LTChN Para o Problema de Transporte Multidimensional, in “Anais do XI Encontro de Física de Reatores e Termo-Hidráulica”, (XI ENFIR), Poços de Caldas - MG, 1997.

[6] M.T.B. Vilhena, L.B. Barichello, J. Zabadal, C.F. Segatto, General Solution of One Dimensional Approximations to the Transporte Equation, *Progress in Nuclear Energy* **33** No.1-2 (1998), 99-115.

[7] J. Zabadal, Solução Analítica da Equação de Ordenadas Discretas Multidimensional, “Tese de Doutourado”, PROMEC, UFRGS, 1994.

[8] C.F. Segatto, M.T.B. Vilhena, Solução Genérica da Equação de Transporte Unidimensional para Elevadas Ordens de Quadratura, in "Anais do XI Encontro de Física de Reatores e Termo-Hidráulica", (XI ENFIR), pp. 238-241, Poços de Caldas, MG,Brazil, 1997.

[9] R.P. Panta, M.T.B. Vilhena, Convergence of the LTS_N Method: Approach of C_0 Semi-groups, *Progress in Nuclear Energy* **34** (1998), 71-77.

[10] R.P. Panta, M.T.B. Vilhena, Convergence in Transport Theory , *Applied Numerical Mathematics*, (1999), 79-92.

[11] R.P. Panta, M.T.B. Vilhena, Convergence of the Spectral Approximations for Steady-state Two-dimensional Transport Problem, in "M and C99", pp. 1965-1976, Madrid, 1999.

[12] K. Case, E. Zweifel, " Linear Transport Theory", Addison-Wesley Publishing Company, 1967.

[13] J. Duderstadt , W. Martin, "Transport Theory", John Wiley-Sons, New York, 1975.

[14] G. H. Golub, V. Loan, " Matrix Computation", The Jonhs Hopkins University Press, New York, 1989.

[15] E. Lewis, W. Miller, "Computational Methods of Neutron Transport", John Wiley-Sons, New York, 1984.