Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, **1**, No. 1 (2000), 101-110.
Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional.

A Equação de Klein-Gordon no Espaço-Tempo de Robertson-Walker

D. GOMES[1], Depto. Matemática, CCNE-UFSM, 97119-900 Santa Maria, RS, Brasil

E.A. NOTTE CUELLO[2], Depto. Matemática, Universidad de Antofagasta, Casilla 170, Antofagasta, Chile

E.C. de OLIVEIRA[3], Depto. Matemática Aplicada, IMECC-UNICAMP, 13081-970 Campinas, SP, Brasil.

Abstract. We obtain, using the generalized derivative operators, the second order Casimir invariant operator associated to the Fantappié-de Sitter group, isomorphic to the 5-dimensional pseudorotation group, which is the group of motions admitted by the massless Robertson-Walker cosmological spacetime.

1. Introdução

O espaço-tempo de de Sitter é o que mais tem sido estudado pela teoria quântica de campos, isso porque junto com o espaço-tempo anti-de Sitter e o espaço-tempo de Minkowski — este último é chato, enquanto os outros dois são curvados — são os únicos que têm simetria máxima. Estes são casos particulares do espaço-tempo de Robertson-Walker e são obtidos deste na ausência de matéria e radiação [1, 2]. O grupo de simetria do espaço-tempo de de Sitter é o grupo $SO(4,1)$ que possui dez parâmetros [3]. Por sua vez, os grupos de simetria do espaço-tempo anti-de Sitter e do espaço-tempo de Minkowski são, respectivamente, o grupo $SO(3,2)$ e o grupo de Poincaré, ambos também com dez parâmetros.

Neste trabalho, usando a metodologia proposta por Arcidiacono, obtemos os operadores diferenciais associados ao chamado grupo de Fantappié-de Sitter. Este grupo contém os grupos acima mencionados [4]. Como sabemos, a geometria das seções espaciais do espaço-tempo de de Sitter é esférica, a do espaço-tempo de Minkowski é plana, enquanto as seções espaciais do espaço-tempo anti-de Sitter têm geometria hiperbólica. Introduzimos um parâmetro k no elemento de linha do espaço-tempo de Robertson-Walker de modo a satisfazer as restrições geométricas ($k = 1$, $k = 0$ e $k = -1$, respectivamente), generalizando a métrica de Beltrami [5].

[1]e-mail: denilson@ime.unicamp.br
[2]e-mail: enotte@uantof.cl
[3]e-mail: capelas@ime.unicamp.br

Utilizando o operador invariante de Casimir de segunda ordem associado ao grupo de Fantappié-de Sitter obtemos a chamada equação de Klein-Gordon, um resultado que generaliza um outro anterior [6]. Por fim, quando o raio do espaço-tempo de de Sitter ou o raio do espaço-tempo anti-de Sitter tende para o infinito recuperamos os resultados associados ao espaço-tempo de Minkowski [7].

Este trabalho está organizado da seguinte forma: na seção 2 discutimos o espaço-tempo de Robertson-Walker sem a presença de matéria, isto é os espaço-tempo de de Sitter, Minkowski e anti-de Sitter; na seção 3 apresentamos a passagem da formulação 5-dimensional com métrica euclidiana para a formulação 4-dimensional com a métrica de Beltrami induzida. Na seção 4 apresentamos o chamado grupo de Fantappié-de Sitter e seus operadores invariantes e finalmente, na seção 5 obtemos explicitamente o operador invariante de Casimir de segunda ordem associado a este grupo.

2. O espaço-tempo de Robertson-Walker

A exigência de homogeneidade e isotropia para o espaço físico em escala cosmológica, conhecida como príncipio de Copérnico, está contemplada nas chamadas coordenadas "comoving". Neste sistema de coordenadas as soluções da equação de campo de Einstein, dependente apenas da constante cosmológica Λ, isto é, sem a presença de matéria e radiação, são dadas por

- $\Lambda > 0$ (espaço-tempo de de Sitter)

$$ds^2 = R^2\{-d\tau^2 + \cosh^2\tau[d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)]\}.$$

  Este é o espaço-tempo de de Sitter. É um espaço de curvatura constante positiva R e pode ser visualizado como uma esfera de raio R no espaço $\mathbb{R}_{(4,1)}$

$$-\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 = R^2. \tag{2.1}$$

- $\Lambda = 0$ (espaço-tempo de Minkowski)

$$ds^2 = -d\tau^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$

  Este é o espaço-tempo de Minkowski expresso em coordenadas esféricas e é um espaço de curvatura nula.

- $\Lambda < 0$ (espaço-tempo anti-de Sitter)

$$ds^2 = R^2\{-d\tau^2 + \cos^2\tau[d\chi^2 + \sinh^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)]\}.$$

Este é o espaço-tempo anti-de Sitter. É um espaço de curvatura constante negativa $-R$ e pode ser visualizado como uma esfera[4] de raio $-R$ no espaço $\mathbb{R}_{(3,2)}$

$$-\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - \xi_4^2 = -R^2. \tag{2.2}$$

Estes três tipos de espaço-tempo são os únicos que apresentam simetria máxima [1, 2].

3. Coordenadas de Beltrami e derivadas

Nesta seção discutimos a parametrização do espaço-tempo de de Sitter e anti-de Sitter via projeção estereográfica, introduzindo as chamadas coordenadas de Beltrami. Apresentamos a relação entre os operadores diferenciais definidos no espaço de imersão do espaço-tempo e aqueles definidos nas coordenadas de Beltrami. Salvo mensão em contrário adotamos nesta e nas próximas seções a seguinte convenção de soma: fica implícita a soma, tomando valores 0, 1, 2 e 3 de dois índices gregos repetidos.

Fazendo $\xi_0 \to i\xi_0$ em $\mathbb{R}_{(4,1)}$ — o espaço de imersão do espaço-tempo de de Sitter — e $\xi_1 \to i\xi_1$, $\xi_2 \to i\xi_2$ e $\xi_3 \to i\xi_3$ em $\mathbb{R}_{(3,2)}$ — o espaço de imersão do espaço-tempo anti-de Sitter — estes tipos de espaço-tempo, dados pelas eqs.(2.1) e (2.2), são formalmente escritos como a esfera de raio R

$$\sum_{A=0}^{4} \xi_A \xi_A = (\xi_0)^2 + (\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 + (\xi_3)^2 + (\xi_4)^2 = R^2. \tag{3.1}$$

A relação entre as coordenadas de Beltrami $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ e as coordenadas do espaço de imersão $\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ são dadas por [4]

$$x_\mu = R\frac{\xi_\mu}{\xi_4} \quad \text{onde} \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \tag{3.2}$$

Introduzindo

$$A_k^2 = 1 + k\frac{-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{R^2}, \tag{3.3}$$

onde $k = 1$, 0 ou -1 é o parâmetro relacionado ao espaço-tempo de de Sitter, Minkowski e anti-de Sitter, respectivamente. Eliminando a coordenada ξ_4, chega-se às seguintes relações entre as coordenadas

$$\xi_4 = \frac{R}{A_k} \quad \text{e} \quad \xi_\mu = \frac{x_\mu}{A_k}. \tag{3.4}$$

[4] Esta superfície tem geodésicas tipo-tempo fechadas, este inconveniente é eliminado tomando-se o espaço-tempo anti-de Sitter como seu espaço de recobrimento [2].

Nas coordenadas de Beltrami o elemento de linha do espaço-tempo de de Sitter e anti-de Sitter é expresso como

$$A_k^4 ds^2 = A_k^2 dx_\mu dx_\mu - kR^{-2} \left(x_\mu dx_\mu\right)^2 \ ,$$

onde $x_0 = ict$, $R^2 A_k^2 = R^2 + k(r^2 + x_0^2)$ e $r^2 = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2$.

Note que quando $k = 1$ o elemento de linha se reduz ao da métrica de Beltrami [5].

Para obter as relações entre as derivadas nos dois sistemas de coordenadas, considere uma função $\varphi(\xi)$ homogênea de grau N em todas as suas variáveis $\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$. Pelo teorema da função homogênea de Euler temos

$$\sum_A \xi_A \partial_A \varphi\left(\xi\right) = N\varphi\left(\xi\right) \ , \tag{3.5}$$

onde denotamos $\partial_A = \partial/\partial\xi_A$, com $A = 0, 1, 2, 3, 4$. Usando a definição de função homogênea podemos escrever

$$\varphi\left(R\frac{\xi_0}{\xi_4}, ..., R\frac{\xi_4}{\xi_4}\right) = \left(\frac{R}{\xi_4}\right)^N \varphi\left(\xi\right) \tag{3.6}$$

e pelas relações (3.4), temos

$$R^N \varphi\left(\xi\right) = \left(\xi_4\right)^N \varphi\left(x, R\right) \ , \tag{3.7}$$

onde a função do lado direito é obtida de $\varphi(\xi)$ considerando as substituições $\xi_4 \to R$ e $\xi_\mu \to x_\mu$.

Derivando a eq.(3.7) com respeito a ξ_4 e ξ_μ, obtemos respectivamente

$$R\frac{\partial}{\partial\xi_4}\varphi\left(\xi\right) = A_k^{1-N}\left(N - x_\mu\partial_\mu\right)\varphi\left(x, R\right) \tag{3.8}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial\xi_\mu}\varphi\left(\xi\right) = A_k^{1-N}\partial_\mu\varphi\left(x, R\right) \ , \tag{3.9}$$

onde A_k é dado pela eq.(3.3) e $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x_\mu$.

Introduzindo a função $\psi(x)$ definida por

$$\psi\left(x\right) = A_k^{-N}\varphi\left(x, R\right) \tag{3.10}$$

nas duas equações acima, resulta a relação entre as derivadas

$$\frac{\partial}{\partial\xi_4}\varphi\left(\xi\right) = \frac{1}{R}\left(\frac{N}{A_k} - A_k x_\mu \partial_\mu\right)\psi\left(x\right), \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi_0}\varphi\left(\xi\right) = \left(A_k\partial_0 - k\frac{N}{A_k R^2}x_0\right)\psi\left(x\right), \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi_\nu}\varphi\left(\xi\right) = \left(A_k\partial_\nu + k\frac{N}{A_k R^2}x_\nu\right)\psi\left(x\right), \tag{3.13}$$

onde $\nu = 1,2,3$, e $\mu = 0,1,2,3$.

Assim, fica resolvido o problema da passagem da formulação 5-dimensional, com coordenadas $\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$, para a formulação 4-dimensional, com coordenadas cartesianas $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$. Estas coordenadas também são chamadas coordenadas de Beltrami. As eqs.(3.11), (3.12) e (3.13) fazem a ligação entre essas duas formulações[5].

4. O grupo de Fantappié-de Sitter

Nesta seção apresentamos o grupo de Fantappié-de Sitter, o grupo das simetrias do espaço-tempo de Robertson-Walker, dependente apenas da constante cosmológica, e seus operadores invariantes nas coordenadas de Beltrami.

O grupo de simetria do espaço-tempo de Robertson-Walker sem a presença de matéria e radiação é o grupo das pseudorotações. Com coordenadas imaginárias colocadas de forma adequadas é chamado grupo de Fantappié-de Sitter. O grupo de Fantappié-de Sitter preserva a equação $\sum \xi_A \xi_A = R^2$, com $\xi_0 \to i\xi_0$ no caso do espaço-tempo de de Sitter e $\xi_1 \to i\xi_1$, $\xi_2 \to i\xi_2$ e $\xi_3 \to i\xi_3$ no caso anti-de Sitter. Seus geradores satisfazem às seguintes relações [3]:

$$\begin{aligned}
-i\,[J_{\kappa\lambda}, J_{\mu\nu}] &= \delta_{\kappa\nu} J_{\lambda\mu} - \delta_{\kappa\mu} J_{\lambda\nu} + \delta_{\lambda\mu} J_{\kappa\nu} - \delta_{\lambda\nu} J_{\kappa\mu}\,, \\
-i\,[T_\lambda, J_{\mu\nu}] &= \delta_{\lambda\mu} T_\nu - \delta_{\lambda\nu} T_\mu\,, \\
-i\,[T_\mu, T_\nu] &= -\frac{1}{R^2} J_{\mu\nu}\,,
\end{aligned}$$

onde $\mu, \nu = 1,2,3,4$ e $T_\mu = \dfrac{1}{R} J_{\mu 4}$. Note que quando $R \to \infty$ temos

$$T_\mu \to p_\mu,$$

onde p_μ é o operador 4-dimensional associado com as translações do espaço-tempo de Minkowski. Deste modo obtemos a álgebra de Lie do grupo de Poincaré — o grupo de Lorentz não homogêneo.

Introduzindo a correspondência

$$p_\mu \to -i\partial_\mu,$$

obtemos uma representação do grupo de Fantappié-de Sitter dado pelos operadores de momento angular 5-dimensional

$$\hbar J_{AB} = -i\hbar \left(\xi_A \frac{\partial}{\partial \xi_B} - \xi_B \frac{\partial}{\partial \xi_A} \right) \equiv L_{AB}\,,$$

[5]Note-se que estamos trabalhando com coordenadas reais. Tomando $\xi_0 \to i\xi_0$ e $x_0 \to ix_0$ na eq.(3.12), esta se funde com a eq.(3.13), assim obtemos exatamente o resultado discutido em [7].

onde $A, B = 0, 1, 2, 3, 4$. Em termos das coordenadas de Beltrami, esses operadores são dados por

$$L_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu \tag{4.1}$$

e

$$T_\lambda \equiv \frac{1}{R} L_{0\lambda} = A^2 p_\lambda + \frac{1}{R^2} x_\mu L_{\lambda\mu}. \tag{4.2}$$

Nestas expressões foram mantidas as coordenadas imaginárias, assim $A^2 = 1 + \sum_\mu x_\mu^2/R^2$ com $\mu, \nu, \lambda = 0, 1, 2, 3$.

É interessante observar que nas equações acima (onde T_μ são os análogos aos operadores de momento lineares no espaço-tempo de Minkowski) os momentos lineares e angulares comparecem em um único tensor. Isto se deve ao fato que os deslocamentos infinitesimais são análogos às translações, por isso o operador de energia-momento não é conservado pelo grupo de Fantappié-de Sitter.

Agora passamos a considerar a forma explícita dos 10 operadores do grupo de Fantappié-de Sitter em coordenadas reais x_μ. Introduzindo o operador de translação temporal T_0 definido por

$$L_{04} \equiv RT_0 = -i\hbar \left(\xi_0 \frac{\partial}{\partial \xi_4} - \xi_4 \frac{\partial}{\partial \xi_0} \right),$$

temos

$$T_0 = \hbar\sqrt{k} \left(\frac{\partial}{\partial x_0} - k \frac{x_0}{R^2} x_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right). \tag{4.3}$$

Os operadores de translação espacial T_μ são definidos por

$$L_{\mu 4} \equiv RT_\mu = -i\hbar \left(\xi_\mu \frac{\partial}{\partial \xi_4} - \xi_4 \frac{\partial}{\partial \xi_\mu} \right),$$

de onde obtemos

$$T_\mu = \frac{i\hbar}{\sqrt{k}} \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + k \frac{x_\mu}{R^2} x_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right) \tag{4.4}$$

com $\mu = 1, 2, 3$.

Os operadores de deslocamento inercial V_μ por sua vez são definidos por

$$L_{0\mu} \equiv V_\mu = -i\hbar \left(\xi_0 \frac{\partial}{\partial \xi_\mu} - \xi_\mu \frac{\partial}{\partial \xi_0} \right),$$

assim temos

$$V_\mu = k\hbar \left(x_0 \frac{\partial}{\partial x_\mu} + x_\mu \frac{\partial}{\partial x_0} \right), \tag{4.5}$$

onde $\mu = 1, 2, 3$.

Finalmente, para os operadores de rotação L_μ definidos por

$$L_{\mu\nu} \equiv L_\lambda = -i\hbar\left(\xi_\mu \frac{\partial}{\partial \xi_\nu} - \xi_\nu \frac{\partial}{\partial \xi_\mu}\right) ,$$

onde (μ, ν, λ) é uma permutação cíclica de $(1, 2, 3)$, temos

$$L_\lambda = -i\hbar\left(x_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} - x_\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu}\right) ; \tag{4.6}$$

nas expressões acima $\hbar$ tem seu sentido usual, $k \neq 0$. O caso que $k = 0$, espaço-tempo de Minkowski, é obtido tomando o limite $R \to \infty$.

De posse destes operadores podemos construir os dois operadores invariantes do grupo de Fantappié-de Sitter, os chamados operadores de Casimir, assim, em termos de T_0, T_μ, V_μ e L_μ temos

$$I_2 = T^2 + T_0^2 + \frac{1}{R^2}\left(L^2 + V^2\right) = -M^2 \tag{4.7}$$

e

$$I_4 = \left(\vec{L} \cdot \vec{T}\right)^2 + \left(T_0\vec{L} + \vec{T} \times \vec{V}\right)^2 + \frac{1}{R^2}\left(\vec{L} \cdot \vec{V}\right)^2 = -N^2, \tag{4.8}$$

onde M^2 e N^2 são constantes.

A eq.(4.7) é chamada equação de Klein-Gordon, no limite $R \to \infty$ temos

$$I_2 \to m^2 \qquad \text{and} \qquad I_4 \to m^2 s\,(s+1)\,,$$

onde m e s são respectivamente a massa de repouso e o spin que caracteriza a representação do grupo de Poincaré [3]. As representações do grupo de Fantappié-de Sitter são rotuladas pelos autovalores de I_2 e I_4 que generalizam a noção de massa e spin. Assim, uma partícula no espaço-tempo de de Sitter não tem massa e spin bem definidos mas autovalores dos operadores invariantes I_2 e I_4.

5. O operador invariante de Casimir de segunda ordem

Neste seção obtemos explicitamente o operador invariante de Casimir de segunda ordem em coordenadas esféricas.

Introduzindo as coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} x_3 &= r\cos\theta, \\ x_2 &= r\sin\theta\sin\phi, \\ x_1 &= r\sin\theta\cos\phi, \\ x_0 &= x_0 \end{aligned}$$

e definindo os seguintes operadores

$$\begin{aligned}
P_1 &= \sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}, \\
P_2 &= \sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\sin\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}, \\
P_3 &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}, \\
\Omega &= x_0\frac{\partial}{\partial x_0} + r\frac{\partial}{\partial r},
\end{aligned}$$

os operadores de translação tomam a forma

$$\begin{aligned}
T_0 &= \hbar\sqrt{k}\left(\frac{\partial}{\partial x_0} - k\frac{x_0}{R^2}\Omega\right), \\
T_1 &= \frac{i\hbar}{\sqrt{k}}\left(P_1 + k\frac{r\sin\theta\cos\phi}{R^2}\Omega\right), \\
T_2 &= \frac{i\hbar}{\sqrt{k}}\left(P_2 + k\frac{r\sin\theta\sin\phi}{R^2}\Omega\right), \\
T_3 &= \frac{i\hbar}{\sqrt{k}}\left(P_3 + k\frac{r\cos\theta}{R^2}\Omega\right).
\end{aligned}$$

Os operadores de deslocamento inercial são escritos como

$$\begin{aligned}
V_1 &= \hbar k\left(x_0P_1 + r\sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial x_0}\right), \\
V_2 &= \hbar k\left(x_0P_2 + r\sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial x_0}\right), \\
V_3 &= \hbar k\left(x_0P_3 + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial x_0}\right).
\end{aligned}$$

Por sua vez, os operadores de rotação tomam a seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
L_1 &= -i\hbar\left(-\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\cos\theta\cos\phi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right), \\
L_2 &= -i\hbar\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\cos\theta\sin\phi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right), \\
L_3 &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}.
\end{aligned}
$$

Obtemos explicitamente a forma do operador invariante de Casimir de segunda ordem introduzindo estes operadores em sua expressão dada anteriormente, eq.(4.7). Fazendo $x_0 = ct$ temos, finalmente, sua expressão

$$
I_2 = -\hbar^2 A_k^2\left\{k\left[-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \triangle\right] + \frac{1}{R^2}\mathcal{L}\right\},
$$

onde $A_k^2 = 1 + \frac{k}{R^2}\left(r^2 - c^2t^2\right)$,

$$
\triangle = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]
$$

é o operador de Laplace em coordenadas esféricas, e

$$
\mathcal{L} = t^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2rt\frac{\partial^2}{\partial r\partial t} + r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2t\frac{\partial}{\partial t} + 2r\frac{\partial}{\partial r}.
$$

Note que no limite $R \to \infty$, o operador I_2 reduz-se ao operador de onda de d'Alembert, ou seja,

$$
\lim_{R\to\infty} I_2 \equiv \Box = \hbar^2\left(\triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right).
$$

Agradecimentos

Agradecemos ao Dr. J. Emílio Maiorino pelas sugestões apresentadas e agradáveis discussões sobre este trabalho.

Referências

[1] S. Weinberg, "Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity", Wiley, New York, 1972.

[2] S.W. Hawking and G.F.R. Ellis, "The Large Scale Struture Of Space-Time", Cambrige University Press, Cambrige, 1986.

[3] F. Gürsey, Introduction to Group Theory, in “Relativity, Groups and Topology”, (C. Dewitt and B. Dewitt, eds.), Gordon and Breach, New York, 1963.

[4] E.A. Notte Cuello and E. Capelas de Oliveira, *Hadr. J.*, **18**, (1995), 181.

[5] G. Arcidiacono, “Relatività e Cosmologia”, Di Renzo, Roma, 1995.

[6] E.A. Notte Cuello and E. Capelas de Oliveira, *Int. J. Theor. Phys.*, **36** (1997), 2123.

[7] E. Capelas de Oliveira e E.A. Notte Cuello, Resumos de XX CNMAC, (1997), 180.