Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, **3**, No. 2 (2002), 101-110.

Magnificação e Linearidade Local: Novas Tecnologias no Ensino de Conceito de Derivada

V. GIRALDO[1], Departamento de Métodos Matemáticos, Instituto de Matemática, UFRJ, Avenida Brigadeiro Trompowski s/n, 21945-970 Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

L.M. CARVALHO[2], Departamento de Matemática Aplicada, Instituto de Matemática e Estatística, UERJ, Rua São Francisco Xavier 524, 20550-013 Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Resumo. Apresentamos uma proposta alternativa para a abordagem inicial do conceito de derivada, que está sendo testada pelos autores numa pesquisa atualmente em andamento com alunos no primeiro curso de cálculo e professores de matemática do ensino médio em cursos de aperfeiçoamento. Esta proposta se baseia na formulação teórica desenvolvida por David Tall, onde a derivada é apresentada a partir da noção de *local straightness*, com a visualização de gráficos de funções no computador.

1. Introdução

Nosso objetivo neste artigo é apresentar uma abordagem para o ensino de derivada de uma função real baseada no conceito de *local straightness*, (sugerida por David Tall, pela primeira vez em [11], e desenvolvida em [12, 13]), e na utilização de calculadoras gráficas e/ou computadores. A partir da noção de imagem conceitual [10, 16], propomos alguns passos para essa construção com o objetivo de enriquecer ao máximo as formas de representação e conexões que o aluno venha a construir no processo de entendimento da definição de derivada.

Esta abordagem visa também reafirmar o caráter local do conceito de derivada. No ensino de cálculo, este conceito é usualmente introduzido a partir da ilustração de retas secantes e tangentes, juntamente com uma série de problemas motivadores clássicos, como maximização e minimização, velocidades instantâneas, aproximações lineares, esboço de gráficos. Estes problemas apontam para diferentes aspectos do conceito; no entanto, a representação geométrica comum a todos é a de retas tangentes, onde a razão incremental figura unicamente como a inclinação de secantes que tendem a uma tangente. Embora encontrar retas tangentes seja, do ponto de vista matemático, um problema de derivada, portanto de natureza puramente

[1] victor@dmm.im.ufrj.br
[2] luizmc@ime.uerj.br

local, sua representação geométrica chama atenção para aspectos não locais. Além disso, essa construção tem como raíz cognitiva a noção de limite, talvez o principal obstáculo na compreensão do conceito de derivada [4, 9].

Com o advento e popularização de computadores e calculadoras gráficas nas duas últimas décadas, se apresentaram diferentes propostas e experiências alternativas para o ensino de matemática usando novas tecnologias (ver [3, 5, 7]). Alguns trabalhos apontam para deficiências na formação de conceitos matemáticos relacionadas com o uso de novas tecnologias no ensino (ver [6, 8]). No ensino de cálculo e de análise, em particular, uma questão se destaca: muitos obstáculos se relacionam com as limitações para a representação computacional dos números reais e de processos de limite de forma geral. Um dos problemas inicialmente discutidos, a partir do desenvolvimento das primeiras pesquisas sobre o impacto de tecnologias computacionais no ensino de matemática, era se estas teriam efeitos positivos ou negativos na aprendizagem de conceitos. Sabemos que os computadores e calculadoras são recursos didáticos e, assim, seus efeitos não podem ser avaliados genericamente. Os "benefícios" ou "malefícios" do uso do computador no ensino não são intrínsecos à máquina, sendo determinados pelo emprego em sala de aula [13].

Na abordagem baseada na noção de *local straightness*, a derivada é apresentada como o coeficiente angular da reta com a qual a curva se assemelha no processo de magnificação de janelas gráficas. Numa primeira análise, podemos pensar em *local straightness* como uma representação gráfica da definição de derivada. Se $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função real diferenciável e $x_0 \in X$ é um ponto fixado, podemos fazer a razão:

$$\left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - a\,h}{h} \right|,$$

onde $a = f'(x_0)$, tão pequena quanto quisermos. No computador, a curva $y = f(x)$ e a reta $y = a\,h + f(x_0)$ se tornam indistingüíveis se observadas próximo o suficiente do ponto $(x_0, f(x_0))$.

Esse artigo está organizado em cinco seções. Na seção 2., desenvolvemos o embasamento teórico desse trabalho. Em 3., detalhamos o conceito de *local straightness*. Em 4., apresentamos a proposta para a abordagem do conceito de derivada. Finalmente, em 5., fazemos algumas considerações e descrevemos nosso trabalho futuro.

2. Definições Formais, Imagens Conceituais e Recursos Tecnológicos

Segundo a teoria desenvolvida por David Tall e Shlomo Vinner [14], *conceito imagem* é a estrutura cognitiva total na mente de um aluno relacionada a um certo conceito matemático. A noção de conceito imagem difere da definição matemática uma vez que inclui todas as ligações, propriedades, conseqüências, processos e imagens mentais associadas ao conceito e pode ou não incluir a conceituação matematicamente correta [2, 12, 15, 16]. Por outro lado, a capacidade de recordação da definição formal, por si só, não está associada a uma imagem conceitual rica. Freqüentemente as idéias fundamentais necessárias para a construção das aplicações e desdobramentos de um conceito não se encontram na sua definição, mas nas imagens intuitivas associadas, como observa Cornu [4].

Ainda segundo Cornu, muitas das expressões usadas nas definições matemáticas formais (em particular em cálculo e análise) possuem significados na linguagem diária que diferem de seu significado matemático preciso - como por exemplo os quantificadores "existe" e "para todo", além da própria palavra "limite". Isto pode acarretar graves distorções na imagem conceitual formada pelos estudantes. Tall [12] afirma que uma imagem mental contraditória pré-existente na mente do aluno pode se constituir num obstáculo para a compreensão de uma definição formal, segundo o autor: *Como o cérebro tem o conhecimento de vários conceitos, uma* definição *(no sentido do dicionário) é simplesmente um modo de identificar um conceito já existente.*

Pela própria natureza da matemática, a existência de um objeto matemático só fica estabelecida pela sua definição. No entanto, do ponto de vista cognitivo, a apresentação da definição não garante, por si só, a formação de uma imagem conceitual satisfatória.

Tall e Barnard [2] denominam *unidade cognitiva* cada uma das porções da estrutura cognitiva em que um indivíduo foca atenção para desenvolver uma idéia matemática. Por exemplo, o fato de que *o gráfico de uma função do segundo é uma parábola* é uma unidade cognitiva que pode contribuir para a formação da imagem mental do gráfico associado a uma dada função quadrática. De acordo com Tall [12], a mente humana é capaz de focar a atenção num pequeno número de unidades cognitivas ao mesmo tempo. A formação de um conceito imagem rico provém do estabelecimento do maior número possível de correlações dentro das unidades cognitivas e entre elas.

Michèle Artigue [1] enumera uma série de possíveis visões da noção de derivada de uma função f num ponto x_0, dentre os quais: o limite da razão $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ quando h tende a 0; a inclinação da reta tangente ao gráfico de f em x_0; a inclinação da reta que melhor aproxima a função f na vizinhança de x_0; o coeficiente do termo de ordem 1 na expansão em série de Taylor de f em torno de x_0; o resultado da aplicação das regras usuais de derivação, sabendo-se as derivadas das funções elementares; a inclinação de uma porção magnificada do gráfico de f na vizinhança do ponto x_0. Hughes-Hallet et al [7] acrescenta a inclinação do gráfico de f em x_0. Podemos incluir nesta lista, pelo menos, a tangente do ângulo que a reta tangente ao gráfico de f em x_0 faz com o eixo horizontal. Citamos ainda as interpretações que do conceito de derivada em outras ciências; tais como velocidade instantânea (em física); taxa de crescimento populacional (em ecologia); custo e receita marginais (em economia).

A teoria desenvolvida por Tall sugere que a abordagem da noção de derivada deve ser planejada de forma que um grande número de visões e representações do conceito (por exemplo, as listadas acima) estejam simultaneamente presentes, de forma a propiciar a formação de uma imagem conceitual rica por meio da ligação entre diferentes unidades cognitivas.

Cada uma das representações acima evidencia certos aspectos do conceito, mas ao mesmo tempo, oculta outros. O enfoque em certos aspectos e omissão de outros pode causar a atrofia dos aspectos omitidos [12]. Encontramos na literatura diversos exemplos onde esse processo de atrofiamento se dá em abordagens baseadas em recursos computacionais.

Hunter, Monaghan e Roper [8] verificam que estudantes usando o programa *Derive* não precisavam substituir valores numéricos da variável independente para obter uma tabela e esboçar o gráfico. Como resultado, alguns estudantes que calculavam os valores por substituição antes do curso, não eram mais capazes de fazê-lo depois. Para uma amostra de dezessete estudantes, foi colocada a questão: *O que você pode dizer sobre* u *se* $u = v + 3$ *e* $v = 1$*?* Nenhum dos estudantes que deixou de responder a questão no pré-teste conseguiu respondê-la no pós-teste e seis dos que responderam corretamente no pré-teste erraram no pós-teste.

Por outro lado, o computador pode ser um instrumento poderoso para o processo de enriquecimento das ligações entre unidades cognitivas, pois processa algoritmos com rapidez e eficiência e pode fornecer resultados sob uma gama de diferentes representações [12]. Em oposição à mente humana, os programas usados atualmente no ensino de cálculo não efetuam ligações entre unidades cognitivas, mas podem processar uma grande quantidade de informações, de uma forma específica, previamente programada. Portanto, experiências computacionais podem ser usadas para complementar a atividade da mente humana, no sentido de contribuir para a formação de imagens conceituais ricas.

Encontramos um exemplo em Gray e Pitta [6]. Os autores realizaram uma experiência utilizando uma calculadora gráfica com uma criança de oito anos, Emily, considerada pelo próprios professores como uma das quatro mais fracas em aritmética num grupo de 104. Nas entrevistas preliminares realizadas, as explicações de Emily dos próprios processos de manipulação numérica revelaram que a criança só era capaz de lidar com número naturais recorrendo à imagem mental de um número natural n representado por n "pontinhos". Esta limitação impossibilitava completamente a realização de operações aritméticas com números maiores que 10 e mesmo as operações e contagens com números pequenos eram efetuadas com dificuldade, pois Emily freqüentemente se perdia na própria imagem mental. Nas atividades aplicadas, Gray e Pitta utilizaram uma calculadora que mostrava simultaneamente o resultado e as parcelas da operação realizada. Era pedido a Emily que encontrasse várias formas diferentes de obter um número dado por meio de operações aritméticas. Nas entrevistas subseqüentes, a criança era estimulada a relatar e explicar suas novas descobertas. Como resultado, nove meses depois, Emily era capaz de operar mentalmente com números naturais de forma satisfatória.

3. Raízes Cognitivas e a Noção de Local Straightness

Tall define um *organizador genérico* [10], como um ambiente que possibilita ao estudante manipular exemplos e (se possível) contra-exemplos de um conceito matemático específico ou de um sistema de conceitos relacionados. Organizadores genéricos podem ser programas ou ambientes computacionais que forneçam respostas imediatas às explorações do usuário (como também, por exemplo, materiais concretos usados no ensino de matemática para crianças). Segundo o autor a concepção de um organizador genérico deve estar baseada numa idéia matemática central relativa ao conceito matemático em questão. Esta idéia não é, em geral, a fundamentação teórica formal do conceito, devendo possuir duas características:

1. fazer sentido (pelo menos potencialmente) para o estudante no estágio em questão;
2. possibilitar expansões cognitivas para construções formais e desenvolvimentos teóricos subsequentes.

Desta forma, Tall chama de *raiz cognitiva* uma unidade cognitiva com as duas características acima.

No caso do conceito de derivada, observamos que a o conceito de limite, não faz sentido para a maioria dos estudantes no estágio dos cursos iniciais de cálculo. Ao contrário, esta noção se revela profundamente contrária à intuição humana, como evidencia sua própria evolução histórica [4, 9]. Portanto, a definição formal de limite não se caracteriza como uma boa raiz cognitiva para o conceito de derivada, pois não satisfaz a primeira condição acima (embora certamente atenda à segunda). Esta conceituação formal deve se colocar como um *objetivo* no desenvolvimento cognitivo dos estudantes, e não como um *ponto de partida* - ao contrário do que ocorre na definição matemática.

A noção de *local straightness* se baseia na idéia de que as curvas diferenciáveis estudadas nos cursos iniciais de cálculo se parecerão com uma reta quando altamente magnificadas na vizinhança de um ponto. A derivada é portanto apresentada como o coeficiente angular desta reta. O organizador genérico associado é um programa de computador que possibilite ao usuário traçar gráficos de funções, mudar janelas gráficas e observar as conseqüentes mudanças de aspecto nas curvas. A Figura 1 mostra o processo de magnificação local da curva $y = x^2$ em torno do ponto $x_0 = 1$.

Esta noção corresponde à percepção humana dos aspectos visuais de um gráfico como entidade global, suas variações e mudanças de inclinação. A idéia de que um objeto curvo parece ser linear quando "olhado de muito perto" se revela familiar. Destacamos como exemplo relatos de dois estudantes participantes de uma pesquisa realizada pelos autores com doze alunos de Cálculo I (em andamento), em relação às suas experiências com mudanças de janelas gráficas:

> *(...) A grosso modo, poderíamos comparar com a vista que teríamos do planeta Terra se o observássemos do espaço, algo parecido com uma*

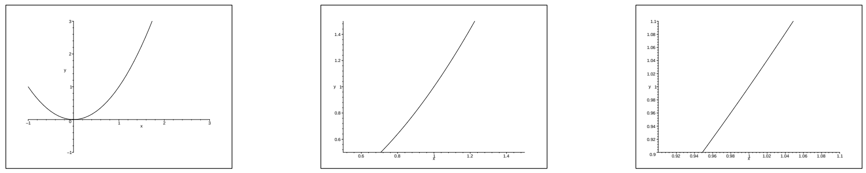

Figura 1: O processo de magnificação local da curva $y = x^2$ em torno do ponto $x_0 = 1$.

> *esfera, porém, se observássemos o planeta de perto, ele possui detalhes a princípio imperceptíveis.*
>
> *(...) Na verdade essa função lembra bem realmente um montanha toda irregular (...) É como se você pegasse uma tora muito grande e quisesse fazer ela uma tangente numa montanha toda irregular.*

4. Uma Abordagem Baseada em Magnificação Local

Baseados nesta fundamentação teórica, descrevemos resumidamente uma proposta alternativa para a abordagem inicial do conceito de derivada. Esta proposta está sendo testada numa pesquisa atualmente desenvolvida pelos autores com alunos no primeiro curso de cálculo e professores de matemática do ensino médio em cursos de aperfeiçoamento.

Na experiência de traçar o gráfico de uma mesma função no computador, em diferentes janelas gráficas, observamos que este pode apresentar aspectos radicalmente distintos dependendo da janela utilizada. O aspecto do gráfico observado é determinado fundamentalmente pela relação entre as escalas utilizadas nos dois eixos coordenados, mais precisamente, pela relação entre as ordens de grandeza das variáveis dependente e independente.

Observemos o exemplo da função polinomial $f(x) = x^3 + 10x^2$. Na Figura 2 vemos o gráfico de f traçado pelo aplicativo *Maple*, à esquerda para $x \in [-0.1, 0.1]$ e $y \in [0, 0.1]$ e à direita para $x \in [-1000, 1000]$ e $y \in [-10^9, 10^9]$. Na primeira janela gráfica utilizada, como os valores da variável x são pequenos, a parcela x^3 é muito menor que $10x^2$, que se torna desprezível. Por isso, o gráfico observado fica muito parecido com o da curva $y = 10x^2$. Já na segunda janela, o contrário ocorre: para valores grandes de x, $10x^2$ é muito menor que x^3. O gráfico fica portanto semelhante ao de $y = x^3$.

Em exercícios dessa natureza, o objetivo fundamental é a compreensão pelos alunos do que está sendo visualizado na tela do computador. Esta análise deve ser desenvolvida por meio da correlação entre os aspectos algébricos, observados na fórmula de f, e gráficos, observados na experiência de mudança de janelas. Este tipo

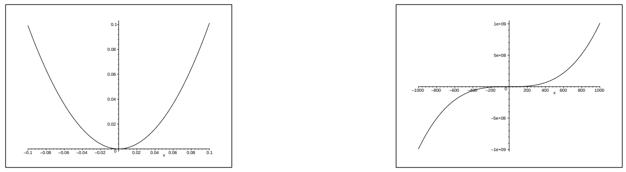

Figura 2: A curva $y = x^3 + 10x^2$ em duas janelas gráficas diferentes, apresentando aspectos radicalmente distintos.

de exercício pode ser utilizado como preparação para a experiência de magnificação local.

A partir daí, propomos a introdução do conceito de derivada desenvolvida nas seguintes etapas:

1. *Determinação numérica da inclinação da reta que melhor aproxima a curva*

   A partir da visualização da curva altamente magnificada em torno de um ponto fixado, os estudantes devem substituir valores e calcular a inclinação aproximada da reta tangente por meio da fórmula usual $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Os valores encontrados serão, é claro, aproximações, mas podem coincidir com o valor exato da derivada devido a erros de visualização e arredondamento. Esta experiência deve ser repetida com a mesma curva em vários pontos diferentes e, também, com várias curvas diferentes.

   Esta atividade aproveita a idéia intuitiva de que uma curva suave, quando magnificada, se assemelha a uma reta. No entanto, é fundamental ficar claro que se trata de uma *aproximação*: a curva não se transforma na reta. A compreensão deste fato ter sido causado por erros de arredondamento e/ou limitações do programa utilizado demandará um estudo mais refinado do significado matemático da aproximação envolvida.

2. *Determinação analítica da inclinação da reta que melhor aproxima a curva*

   Ainda baseados na visualização da curva $y = f(x)$ magnificada, os estudantes deverão encontrar o valor exato a da inclinação da reta que melhor aproxima a curva, por meio recursos algébricos. Por exemplo, para encontrar este valor no caso de $f(x) = x^2$ em $x = 3$, podemos fazer $f(3+h) = (3+h)^2 = 9+6h+h^2 \approx 9 + 6h$. O valor procurado é portanto $a = 6$.

   Na etapa anterior, encontramos uma aproximação numérica para o valor da inclinação da reta que melhor aproxima a curva. Nesta, determinamos o mesmo valor por meio de uma aproximação algébrica, na qual foram desprezadas as potências de h de grau igual ao superior a 2. Aqui, se coloca naturalmente a questão de porque fazer justamente este tipo de aproximação. Uma primeira justificativa estaria no fato de estarmos buscando uma aproximação por meio de uma reta. Esta discussão abre caminho para o aprofundamento da compreensão do significado matemático preciso do tipo de aproximação a que nos referimos, da forma que descrevemos a seguir.

3. *Discussão sobre o significado matemático de aproximação linear local*

   Qualquer reta que corte a curva dada no ponto $(x_0, f(x_0))$ aproxima a curva, no sentido em que, para qualquer valor real de a, a diferença $\rho(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - a\,h$ fica tão pequena quanto quisermos quando h se aproxima de 0. No entanto, se escolhemos um valor de a de tal forma que $\rho(h)$ só tenha termos de ordem maior ou igual a 2, garantimos que também $\frac{\rho(h)}{h}$ tende a 0 quando h tende a 0. A reta que verifica esta propriedade é, dentre todas as que cortam a curva dada em $(x_0, f(x_0))$, *aquela que melhor aproxima a curva na vizinhança do ponto.*

   Note-se que a experiência de magnificação local sugere a necessidade de relacionarmos as escalas dos eixos, estabelecendo uma unidade padrão. Ao dividirmos $\rho(h)$ por h, estamos comparando esta diferença com a unidade h. Portanto, a magnificação local fornece uma representação para o fato de que, se a é a inclinação da reta que melhor aproxima a curva, então a diferença $\rho(h)$ tende a 0 mesmo quando comparada a h.

4. *Conceituação matemática de aproximação local*

   Baseados na discussão desenvolvida na etapa anterior, formulamos a conceituação formal da aproximação da razão $\frac{\rho(h)}{h}$ por 0: diremos que esta *tende a* 0 se, escolhida qualquer precisão $\varepsilon > 0$, obtemos um $\delta > 0$ tal que:

   $$-\varepsilon < \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - a\,h}{h} < \varepsilon \qquad \forall\, h \in [-\delta, \delta].$$

   Ou, em notação de limite:

   $$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\ .$$

5. Considerações Finais

Nesta abordagem, o valor da derivada no ponto não mais aparece como uma propriedade de uma reta, externa à curva, que por um processo de limite torna-se tangente, mas como uma propriedade geométrica exclusivamente local e intrínseca à curva. A reta que melhor aproxima a curva localmente (que vem a ser a tangente) é determinada a partir da observação local da curva, e não ao contrário.

Na abordagem tradicional, onde a ilustração da curva com a reta tangente é apresentada como única representação geométrica, são colocados, com mesmo destaque visual, aspectos locais e não locais. As próprias palavras *tangente* e *secante* remetem a aspectos globais referentes à posição geométrica relativa entre a curva e a reta. Consideremos alguns exemplos específicos, nos quais distintas situações do aspecto geométrico global da curva e da reta tangente estão associadas à mesma situação local na vizinhança do ponto de tangência: a reta tangente coincide com a curva (se a própria curva já é uma reta); a reta tangente não intercepta a curva num segundo ponto (se, por exemplo, a curva é convexa); a reta tangente intercepta a curva num segundo ponto, sendo também secante a ela; a reta tangente "corta" a curva no ponto de tangência (se este é um ponto de inflexão).

Inserida num contexto mais amplo de representações, onde os aspectos locais são evidenciados, essa mesma ilustração pode assinalar o contrário: *para estudar a diferenciabilidade de uma curva, não importa o que acontece longe do ponto de tangência*. O que propomos portanto não é uma *substituição*, mas uma *ampliação* dos referenciais fornecidos aos alunos. Desta forma, acreditamos estar propiciando a formação de imagens conceituais mais ricas, por meio do estímulo a conexões entre diferentes unidades cognitivas.

Na construção aqui apresentada, partimos de raízes cognitivas bem estabelecidas para construir o conceito de derivada. Nas etapas 1 e 2 (seção 4.), trabalhamos aspectos numéricos e algébricos do conceito. Em seguida, na etapa 3, desenvolvemos a idéia de derivada como comparação de duas grandezas que mantém entre si uma relação de dependência de tal forma que a anulação da variação de uma implica na anulação da variação da outra. O resultado desta comparação, no entanto, não se anula e é representado por um número real. Neste ponto, duas idéias se destacam fortemente: razão, no sentido de comparação de grandezas, e limite. Finalmente, em 4, chegamos à definição matemática.

A abordagem usual do conceito de derivada se baseia na noção de limite, que não se caracteriza como uma boa raiz cognitiva, devendo ser um objetivo e não uma referência no desenvolvimento cognitivo. Procuramos mostrar neste trabalho que, por outro lado, a noção de magnificação local, além de fazer sentido para alunos no estágio em questão, serve como base para os desdobramentos teóricos até a definição do conceito.

No momento, estamos preparando uma compilação dessas e outras atividades para a produção de material didático para ser utilizados como material de apoio em cursos iniciais da graduação e de especialização para professores.

Abstract. We propose an alternative initial approach for the concept of derivative. The authors have been testing this approach with first calculus course students and secondary math teachers. Based upon a theoretical framework introduced by David Tall, the authors present the derivative using *local straightness* notion for visualizing function graphs generated by computers.

Referências

[1] M. Artigue, Analysis, em "Advanced Mathematical Thinking" (D.O. Tall, ed.), pp. 167-198, Kluwer, Dordrecht, 1991.

[2] A.D. Barnard e D. Tall, Congnitive units, connections, and mathematical proof, em "Proceedings of the 21^{st} Annual Conference for the Psichology of Mathematics Education" (E. Pehkonen, ed.), vol. 2, pp. 41-48, ICME, 1997.

[3] W. Bianchini e A.R. Santos, "Aprendendo Cálculo com Maple", IM/UFRJ, Rio de Janeiro, 2000.

[4] B. Cornu, Limits, em "Advanced Mathematical Thinking" (D.O. Tall, ed.), pp. 153-166, Kluwer, Dordrecht, 1991.

[5] V. Giraldo e L.M. Carvalho, Funções e novas tecnologias: algumas perguntas, em "Anais do III Seminário: A Pesquisa em Educação Matemática no Rio de Janeiro", Vol. 1, pp. 24-29, SBEM/RJ, 2000.

[6] E.M. Gray e D. Pitta, Changing Emily's images, *Mathematics Teaching*, **161** (1997), 38-51.

[7] D. Hughes-Hallet et al, "Cálculo e Aplicações", Edgard Blücher, São Paulo, 1999.

[8] M. Hunter, J.D. Monaghan e T. Roper, The effect of computer algebra use on students' algebraic thinking, em "Working Papers for ESCR Algebra Seminar" (R. Sutherland, ed.), pp. 1-20, London University, Institute of Education, 1993.

[9] A. Sierpinska, A., Humanities Students and Epistemological Obstacles Related to Limits, *Educational Studies in Mathematics*, **18**, No. 4 (1987), 371-387.

[10] D.O. Tall, Concept images, generic organizers, computers & curriculum change, *For the Learning of Mathematics*, **9**, No. 3 (1989), 37-42.

[11] D.O. Tall, Intuition and rigour: the role of visualization in the calculus, *MAA Notes*, **9** (1991), 105-119.

[12] D.O. Tall, Biological brain, mathematical mind & computational computers, em "ATCM Conference", pp. 1-18, ATCM, 2000.

[13] D.O. Tall, Cognitive development in advanced mathematics using technology, *Mathematics Education Research Journal*, **12**, No.3 (2000), 210-230.

[14] D.O. Tall e S. Vinner, Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*, **12** (1981), 151-169.

[15] S. Vinner, The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics, em "Advanced Mathematical Thinking" (D.O. Tall, ed.), pp. 65-81, Kluwer, Dordrecht, 1991.

[16] S. Vinner, Concept definition, concept image and the notion of function, *The International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, **14** (1983), 293-305.