TEMA Tend. Mat. Apl. Comput., **4**, No. 2 (2003), 167-176.

Abordagem $\mathcal{Q}_r$ para Estabilidade Regional de Sistemas Chaveados

S.P. BEAN[1], Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Universitário, Trindade, 88040-900 Florianópolis, SC, Brasil.

Resumo. Neste trabalho se estuda a análise de estabilidade $\mathcal{Q}_r$ e se calcula o domínio de atração de uma classe particular de sistemas híbridos conhecida como sistemas chaveados. No conceito de estabilidade $\mathcal{Q}_r$, usa-se uma função de Lyapunov dependente dos estados de tipo polinomial e diferente da quadrática convencional. O problema a resolver é apresentado como um problema de otimização convexa em termos de inequações matriciais lineares (LMIs). Resultados numéricos são apresentados exibindo uma abordagem menos conservadora que a quadrática convencional e a abordagem biquadrática ([5]), no cálculo das respectivas regiões de estabilidade para um dado exemplo.

1. Introdução

Sistemas com chaveamentos são exemplos de sistemas híbridos do mundo real onde se misturam decisões lógicas e leis de controle contínuo. Exemplos de sistemas híbridos aparecem nos sistemas com relés, chaveamentos, motores de passo e outros controladores de movimento, nos sistemas de controladores com estrutura variável, nos veículos inteligentes, nos sistemas de controle de auto-estrada, nos sistemas de manufatura moderna flexível e nos sistemas de controle de vôos.

Este trabalho trata de uma classe particular de sistemas híbridos, os sistemas chaveados. Neste sentido, outros autores como Johansson [2] e Pettersson [7], trabalhando com sistemas lineares por partes, tratam da análise de estabilidade propondo a procura de uma função de Lyapunov não convencional, fazendo que essa função seja quadrática por partes (abordagem Pwq) e aplicando a metodologia para análise de sistemas chaveados.

Em trabalhos anteriormente apresentados, [5, 4], se fez uso da extensão do conceito de estabilidade biquadrática ([9]) para sistemas chaveados obtendo resultados menos conservadores quando comparados com outras metodologias.

Na abordagem proposta neste trabalho, usa-se o conceito de estabilidade $\mathcal{Q}_r$ [8], nesse conceito os chaveamentos também dependem da dinâmica da variável de estado contínua e procura-se uma função de Lyapunov de caráter polinomial[2] e comum ao sistema[3].

[1] palomino@mtm.ufsc.br

[2] O grau do polinômio é maior quanto maior é o valor de $r = 2d$ para $d \geq 1$.

[3] Na abordagen biquadrática a estrutura da função de Lyapunov é similar a abordagem $\mathcal{Q}_2$

O objetivo deste trabalho é o tratamento da análise de estabilidade e o cálculo do domínio de atração dessa classe de sistemas, resolvendo-o como um problema de otimização convexa em termos de Inequações Matriciais Lineares (LMIs), [1]. Exemplos numéricos ilustram a vantagem da metodologia apresentada, fornecendo regiões de estabilidade maiores que as obtidas em [5].

Algunas notações são necessárias. O conjunto dos inteiros positivos $\mathcal{J}_n = \{1, \cdots, n\}$, o conjunto das n-uplas inteiras não negativas $\mathbb{J}^n$, o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, o espaço das matrizes $\mathbb{R}^{n\times m}$. S' é a matriz transposta da matriz real S e $S > 0$ ($S \geq 0$) indica uma matriz definida positiva (semidefinida positiva). A notação $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ é o meta-politopo determinado pelo produto cartesiano dos politopos $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$. Por último, dado um conjunto finito de vetores V, $\mathbf{Co}\{V\}$ denota o fecho convexo dos elementos de V. Como trabalha-se com sistemas autônomos, a variável t será omitida toda vez que necessário.

2. O Problema

Dado o sistema chaveado afim da forma:

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + b_i \ , \quad x \in X_i \ , \quad i \in \mathcal{J}_n \ , \quad t \geq 0, \tag{2.1}$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ denota a componente contínua do estado assumindo valores no conjunto $X_i \subset \mathbb{R}^{n_x}$ e $i \in \mathcal{J}_n$ denota a variável discreta, assume-se que $A_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ são matrizes constantes, e $b_i \in \mathbb{R}^{n_x}$ são vetores constantes.

Com a finalidade de evitar comportamentos indesejáveis nos sistemas abordados, assumem-se as seguintes hipóteses:

A 1. *A origem, $x = 0$, é um ponto de equilíbrio do sistema (2.1)*[4] *e considera-se $\mathcal{B}_x$ um politopo em uma vizinhança da origem no qual a estabilidade local será estudada.*

A 2. $\mathbb{X} = X_1 \cup \ldots \cup X_n \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$. *Cada conjunto X_i possui interior não vazio e não há superposição entre as regiões do modelo, ou seja, os interiores desses conjuntos são disjuntos dois a dois.*

A 3. *O lado direito de (2.1) é uma função limitada para cada $i \in \mathcal{J}_n$.*

A 4. *Num intervalo finito de tempo há um número finito de chaveamentos.*

A 5. *Nas l_k fronteiras das regiões adjacentes a X_k, não há modos deslizantes, isto é, se $x(t^-) \in X_i \cap X_j$, então $x(t) \notin X_i \cap X_j$, onde $x(t^-)$ denota a posição da trajetória imediatamente antes do tempo t.*

Para apresentação da metodologia, os conjuntos X_i são denotados na forma seguinte:

$$X_i = \{\ x \ : \ \psi_{ik}(x) \geq 0, \ k = 1, \ldots, m_i\}, \, i \in \mathcal{J}_n, \tag{2.2}$$

[4]Isto é, existe uma região X_i onde $b_i = 0$.

onde $\psi_{ik}(x) \in \mathbb{R}$ são funções afins em x, e m_i é o número de funções ψ que descreve X_i.

Por conveniência, é associada a cada variável discreta i a função lógica $\delta_i(x) = \delta_i$, $i \in \mathcal{J}_n$ com $\delta_i \in \{0, 1\}$. Define-se, então, a função vetorial lógica $\delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{J}^n$:

$$\delta(x) \triangleq [\ \delta_1 \ldots \delta_n\ ]' = c_i \ \text{ se } \ x(t^-) \text{ e } x(t) \text{ pertencem a } X_i, \tag{2.3}$$

onde c_i a i-ésima coluna da matriz identidade I_n. Assim sendo, se o estado discreto assume um dado valor $i \in \mathcal{J}_n$, quando $x \in X_i$, a i-ésima componente da função vetorial lógica δ assume o valor unitário e todos os valores restantes são iguais a zero. A imagem da função vetorial lógica está definida pelo conjunto[5]

$$\Delta \triangleq \left\{\ c_1, \ldots, c_n\ \right\} \subset \mathbb{J}^n. \tag{2.4}$$

Observa-se que os elementos δ_i de δ satisfazem $\sum_{i=1}^{n} \delta_i = 1$. Sem perda de generalidade, neste trabalho, escolhe-se δ_n como referência e, assim, $\delta_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i$. Com essa escolha, o sistema (2.1) pode ser expresso como um sistema associado. Isto será visto nas próximas seções.

3. Definições e conceitos

Nesta seção, faz-se extensão para sistemas chaveados, do conceito de estabilidade $\mathcal{Q}_r$ dada em Trofino [8]. Para apresentação dessa abordagem, serão necessárias algumas definições e conceitos expostos a seguir.

A função de Lyapunov

Dadas as matrizes constantes U_i, $T_{ij} \in \mathbb{R}^{n_{i+1} \times n_i}$ para $i = 0, \cdots, (d-1)$, define-se Θ_i como sendo matrizes da mesma ordem[6] que T_{ij} para cada i, como se segue:

$$\Theta_i(x) \ = \ \sum_{j=1}^{n_x} T_{ij} x_j + U_i \quad \in \mathbb{R}^{n_{i+1} \times n_i} \quad i = 0, ..., (d-1)\ , n_0 = n_x, \tag{3.1}$$

onde x_j é a j-ésima componente do vetor x.

$\Theta_i(x) \in \mathbb{R}^{n_{i+1} \times n_i}$ é uma matriz afim para cada $i = 0, \ldots, d-1$, onde d é um inteiro positivo.

Definem-se as matrizes $\Theta(x)$ e $\mathcal{P}(x)$ da forma seguinte:

$$\Theta(x) \ = \ \begin{bmatrix} \Theta_0 \\ \Theta_1 \Theta_0 \\ \vdots \\ \Theta_{d-1} \Theta_{d-2} \cdots \Theta_0 \end{bmatrix}, \tag{3.2}$$

[5]Por simplicidade de notação, será considerado apenas $\delta \in \Delta$ toda vez que $\delta(x) = c_i \in \Delta$.

[6]Para cada valor $d > 1$, n_ie n_{i+1} são inteiros positivos que definem, respectivamente, o número de colunas e linhas da matriz Θ_i.

$$\mathcal{P}(x) = \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta(x) \end{bmatrix}' P \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta(x) \end{bmatrix}, \tag{3.3}$$

A função de Lyapunov candidata, $v(x)$, será considerada da seguinte forma

$$v(x) = x'\mathcal{P}(x)x, \tag{3.4}$$

onde a matriz P de $\mathcal{P}(x)$ é de dimensão conveniente[7]. Também a matriz dada, $\Theta(x)$, é uma matriz afim em x que define a estrutura da função de Lyapunov.

Definição 3.1 (Estabilidade $\mathcal{Q}_r$). *Considerando $r = 2d$ e dado um politopo $\mathcal{B}$, diz-se que a origem do sistema (2.1) é localmente $\mathcal{Q}_r$ estável se existir uma função $v(x) = x'\mathcal{P}(x)x$ com $\mathcal{P}(x)$ da forma (3.3) e funções[8] α_1, α_2, α_3 de classe $\mathcal{K}$ tais que sejam satisfeitas as seguintes condições para todo $x \in \mathcal{B}$:*

- $\alpha_1(\|x\|) \leq v(x) \leq \alpha_2(\|x\|)$;
- $\dot{v}(x) = x'\dot{\mathcal{P}}(x)x + x'A(x)'\mathcal{P}(x)x + x'\mathcal{P}(x)A(x)x \leq -\alpha_3(\|x\|)$.

Essa definição estende, para o caso de sistemas chaveados, a noção de estabilidade $\mathcal{Q}_r$ apresentada em Trofino [8] no contexto de sistemas não lineares incertos e implica em estabilidade assintótica da origem do sistema chaveado. Quando são satisfeitas as condições da Definição 3.1, a função $v(x) = x'\mathcal{P}(x)x$ é dita ser uma função de Lyapunov para o sistema chaveado e é comum a todas as regiões X_i. Com isso, garante-se a estabilidade $\mathcal{Q}_r$ da origem do sistema (2.1). Pode-se, então, obter uma estimativa da região de atração para a origem desse sistema.

Domínio de Atração

Se um sistema e localmente estável, o domínio de atração do sistema é uma região invariante do espaço de estados, tal que toda trajetória que se inicia em algum ponto dessa região converge assintoticamente para a origem do sistema. Mais detalhes podem ser encontrados em Khalil [3]. A estimativa do domínio de atração é feita calculando-se a maior superfície de nível da função de Lyapunov dentro do politopo $\mathcal{B}_x$. Com essa finalidade, define-se o seguinte conjunto como estimativa dessa região:

$$\Upsilon = \{\, x \,:\, v(x) = x'\mathcal{P}(x)x \leq 1 \}\,. \tag{3.5}$$

O politopo $\mathcal{B}_x$ pode ser descrito por $\mathcal{B}_x = \left\{ x \,:\, a_l^{'}x \leq 1 \,,\ l = 1, \ldots, n_e \right\}$, onde $a_l \in \mathbb{R}^{n_x}$ são vetores dados associados às faces[9] do politopo. Também, $\mathcal{B}_x$ pode ser representado de forma equivalente pelos seus vértices.

A estimativa Υ deve estar incluída em $\mathcal{B}_x$, então usando os fundamentos teóricos em Trofino [8] e Boyd et al [1], a condição para determinar $\Upsilon \subset \mathcal{B}_x$ pode ser colocada

[7] P será determinada resolvendo o problema de otimização dado pelo teorema na seção 4.
[8] Veja definição das funções α_i em [3].
[9] n_e é o número de faces do politopo.

em termos de LMIs como se segue:

$$\begin{bmatrix} 1 & \begin{bmatrix} a_l^{'} & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_l \\ 0 \end{bmatrix} & (P + LC + C^{'}L^{'}) \end{bmatrix} \geq 0, \; l = 1, \ldots, n_e,$$

com $C = \begin{bmatrix} C_x & 0 \\ \Theta(x) & -I_{n_1} \end{bmatrix}$ e L é uma matriz livre a ser determinada. A matriz C_x é obtida fazendo uso da sua forma geral[10] :

$$C_z = \begin{bmatrix} z_2 & -z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z_3 & -z_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & z_{n_z} & -z_{n_z-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_z-1\times n_z} \quad \text{com} \quad z \in \mathbb{R}^{n_z}. \tag{3.6}$$

Como feito em Trofino [8], a região de atração estimada Υ será otimizada pela minimização do traço da matriz $P + LC + C^{'}L^{'}$ $(\mathsf{tr}(P + LC + C^{'}L^{'}))$.

4. Análise de Estabilidade

Nesta seção serão descritas condições suficientes que conduzirão à proposta do Teorema de estabilidade.

Fazendo uso da função δ e do conjunto Δ definidos em (2.3) e (2.4), respectivamente, e considerando o n-ésimo termo de δ como variável de referência, ou seja, $\delta_n \; = \; 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i$, reescreve-se (2.1) na forma associada dada por:

$$\dot{x} \;=\; A_n x + \textstyle\sum_{i=1}^{n-1}(A_i - A_n)\delta_i x \;+\; b_n + \textstyle\sum_{i=1}^{n-1}(b_i - b_n)\delta_i, \; x \in \mathcal{B}_x, \; \delta \in \; \Delta, \tag{4.1}$$

onde $\mathcal{B}_x \subset \mathbb{R}^{n_x}$ é um politopo convexo, vizinhança da origem, que representa os valores de interesse da variável de estado $x(t)$ para fins de análise de estabilidade do sistema (4.1).

Considera-se também o politopo, determinado a partir de Δ, $\mathcal{B}_\delta = \mathbf{Co}(\boldsymbol{\Delta})$, cujos vértices são os elementos de Δ.

Introduz-se o seguinte vetor auxiliar $\pi \in \mathbb{R}^{n_\pi}$, onde $n_\pi = (n-1)n_x + n + 1$.

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi_1 & \cdots & \pi_n & \cdots & \pi_{2n} \end{bmatrix}^{'} \quad \text{com} \quad \begin{array}{rcl} \pi_i & = & \delta_i x \;, \;\; \forall i \in \mathcal{J}_{n-1} \\ \pi_n & = & 1 \\ \pi_{n+i} & = & \delta_i \;, \;\; \forall i \in \mathcal{J}_n \end{array} . \tag{4.2}$$

As relações $\pi_n = 1$ e $\pi_{n+i} = \delta_i$ são alternativamente representadas[11] por $\pi_n x - x = 0$ e $\pi_{n+i} - \delta_i \pi_n = 0$, respectivamente.

Por simplicidade de notação, as relações entre x e o vetor auxiliar π, dados acima, são representadas numa forma mais compacta pela notação $(x, \pi) \in \mathcal{D}$ com

[10] Detalhes a respeito dessa matriz se encontram no Lema 2.1 em Trofino [8].

[11] Observe que, $\pi_i \in R^{n_x}, i \in \mathcal{J}_{n-1}$ e $\pi_n, \pi_{n+i} \in R, i \in \mathcal{J}_{n-1}$.

$\mathcal{D}$ definido por

$$\mathcal{D} = \left\{ (x, \pi) \, : \, \begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \pi \end{bmatrix} = 0 \right\}. \tag{4.3}$$

Assim, o sistema (4.1) pode ser expresso como se segue:

$$\dot{x} \; = \; A_n x + \mathbf{A}\pi \;, \quad x \in \mathcal{B}_x, \; (x, \pi) \in \mathcal{D}, \tag{4.4}$$

com
$\mathbf{A} = [\; (A_1 - A_n) \quad \cdots \quad (A_{n-1} - A_n) \quad b_n \quad (b_1 - b_n) \quad \cdots \quad (b_{n-1} - b_n) \quad 0_{n_x \times 1} \;]$.

Nesse caso, as matrizes $\Omega_1 \in \mathbb{R}^{n_\Omega \times n_x}$ e $\Omega_2 \in \mathbb{R}^{n_\Omega \times n_\pi}$, que definem o conjunto $\mathcal{D}$, também são funções afins de $(x, \delta_1, \ldots, \delta_n)$ representadas pelas relações dadas em (4.2). Nota-se que δ definida em (2.3) satisfaz $\delta\delta^{'} = diag(\delta_i)$, ou , de maneira equivalente:

$$\delta_i \delta_j = 0, \qquad \delta_i(\delta_i - 1) = 0 \;, \quad \forall \, i \neq j \in \mathcal{J}_n. \tag{4.5}$$

De (4.2), (4.5) e expressando a variável de referência, δ_n, em termos de x e das componentes de π, surgem outro conjunto de identidades (veja na referência [5]) que podem ser incorporadas como novas linhas das matrizes Ω_1 e Ω_2 dadas em (4.3).

Notações auxiliares

A partir das funções ψ_{ik} dadas em (2.2) que definem as regras de chaveamento, constroem-se as matrizes ϕ_i, Φ:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{2n} E_i^{'} \phi_i E_i \quad \text{com} \quad \begin{cases} \phi_i = \sum_{k=1}^{m_i} R_{ik} \psi_{ik}, \;\; R_{ik} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}, \quad i = 1, \ldots, n \\ \\ \phi_i = \sum_{k=1}^{m_i} R_{ik} \psi_{(i-n)k}, \;\; R_{ik} \in \mathbb{R}, \quad i = n+1, \ldots, 2n \end{cases}, \tag{4.6}$$

onde E_i são matrizes constantes, $R_{ik} > 0$ são variáveis de escalonamento a serem determinadas, que surgem após a aplicação do $\mathcal{S}$-*procedure* ([11]). Para $x \in \mathbb{R}^{n_x}$, consideram-se as matrizes $\tilde{\Theta}_i(x)$ da seguinte forma

$$\tilde{\Theta}_i(x) \;\; = \;\; \sum_{j=1}^{n_x} T_{ij} w_i r_j \quad \in \mathbb{R}^{n_{i+1} \times n_x} \quad i = 0, ..., d-1, \tag{4.7}$$

com cada w_i dada por $w_0 = x$, $w_1 = \Theta_0 x$, $w_2 = \Theta_1 \Theta_0 x$, $\ldots$, $w_d = \Theta_{d-1} \cdots \Theta_1 \Theta_0 x$.

Sejam n_π, n_Ω e $m_a = \sum_{i=0}^{d} n_i$, e as matrizes $D \in \mathbb{R}^{m_a \times m_a}$, $F \in \mathbb{R}^{m_a \times (m_a + n_\pi)}$, $C \in \mathbb{R}^{(m_a - n_x) \times m_a}$, $\Psi \in \mathbb{R}^{(m_a - 1) \times m_a}$, $\Omega \in \mathbb{R}^{(3m_a - n_x + n_\Omega + n_\pi - 1) \times (2m_a + n_\pi)}$, $N \in \mathbb{R}^{(m_a) \times (m_a + n_\pi)}$ dadas, respectivamente, por

$$D = \begin{bmatrix} I_{n_x} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -(\tilde{\Theta}_0(x) + \Theta_0(x)) & I_{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ -\tilde{\Theta}_1(x) & -\Theta_1(x) & I_{n_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\tilde{\Theta}_{d-1}(x) & 0 & \cdots & \Theta_{d-1}(x) & I_{n_d} \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} A_n & 0_{n_x\times n_1} & 0_{n_x\times n_2} & \cdots & 0_{n_x\times n_d} & \mathbf{A} \\ 0_{n_1\times n_x} & & & \cdots & & 0_{n_1\times n_\pi} \\ 0_{n_2\times n_x} & & & \cdots & & 0_{n_2\times n_\pi} \\ \vdots & & & \cdots & & \vdots \\ 0_{n_d\times n_x} & & & \cdots & & 0_{n_d\times n_\pi} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -\Theta_0(x) & I_{n_1} & & \cdots & 0 \\ 0 & -\Theta_1 & I_{n_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & & \cdots & -\Theta_{d-1} & I_{n_d} \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} -D & F \\ 0 & C \quad 0 \\ 0 & C_{\pi_\Theta} \\ 0 & \begin{bmatrix} \Omega_1 & 0 & \Omega_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} C \\ C_x \quad 0 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} I_{m_a} & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.8}$$

sendo $\pi_\Theta = \begin{bmatrix} x & \Theta(x)\,x & \pi \end{bmatrix}'$ e as matrizes C_x e C_{π_Θ} dadas em (3.6).

Dadas as notações auxiliares, apresenta-se o resultado principal desta seção.

Teorema 4.1 (Estabilidade regional $\mathcal{Q}_r$ do Sistema Chaveado Afim). *Considere o sistema* (2.1) *com as hipóteses* **A1**-**A5** *e seu respectivo sistema associado* (4.1)*. Seja* $\Theta(x)$*, definida em* (3.2)*, uma dada função matricial em* x*. Considerem-se as notações auxiliares* (4.6) *e* (4.8)*.*

Se P, L, M, R_{ik} *para* $i = 1, \ldots, 2n$, $k = 1, \ldots, m_i$ *resolvem o seguinte problema de otimização, onde as LMIs são construídas em todos os vértices do meta-politopo* $\mathcal{B} = \mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta \times \mathcal{B}_w$*:*

$$\min \quad \mathsf{tr}\ (P + L\Psi + \Psi' L') \qquad \textsf{sujeito a:}$$

$$P = P', \quad \begin{bmatrix} 1 & \begin{bmatrix} a_l' & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_l \\ 0 \end{bmatrix} & (P + L\Psi + \Psi' L') \end{bmatrix} \geq 0, \ l = 1, \ldots, n_e ,$$

$$\begin{bmatrix} 0 & PN \\ N'P & 0 \end{bmatrix} + M\Omega + \Omega' M' + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Phi \end{bmatrix} < 0,$$

então, o sistema (2.1) *é assintoticamente localmente estável e* $v(x) = x'\mathcal{P}(x)x$*, com* $\mathcal{P}(x)$ *como em* (3.3)*, é uma função de Lyapunov para esse sistema. Também, a região* Υ *definida por* (3.5) *é positivamente invariante, e, para qualquer* $x(0) \in \Upsilon$*, a trajetória* $x(t) \in \Upsilon$ $\forall t \geq 0$ *e se aproxima da origem quando* $t \to \infty$*.*

A primeira LMI do teorema, está associada a condição $\epsilon_1 x'x \leq v(x) \leq \epsilon_3(1 + \epsilon_4)x'x$ dada na Definição 3.1, além de estimar o domínio de atração. Já a segunda LMI está associada à $\dot{v}(x) = -\epsilon_3 x' x$(a segunda condição na definição). Pela limitação do espaço, a prova do teorema assim como outros detalhes podem ser lidos em [6].

5. Resultados Numéricos

O exemplo seguinte, encontrado em Ponce et al. [10], ilustra o potencial dessa metodologia. Nele, apresentam-se os domínios de atração do sistema quando usados os conceitos de estabilidade $\mathcal{Q}_r$, para $r = 2$ e $r = 4$.

Exemplo 5.1 (Domínio de Atração do Pêndulo Invertido). *Considere-se o problema do pêndulo rotatório invertido dado pelo sistema com saturação*

$$\dot{x} = Ax + b\mathsf{sat}(K'x). \tag{5.1}$$

Nesse caso,
$n_x = 2,\ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},\quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},\quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ K = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ *e* $\mathsf{sat}(u)$ *é a função de saturação normalizada dada por* $\mathsf{sat}(u) = \begin{cases} -1 & u < -1 \\ u \quad se & |u| \le 1 \\ 1 & u > 1 \end{cases},\ u = K'x \in R.$

O sistema (5.1) *é reescrito como um sistema afim chaveado* ($n = 3$ *e* $\mathcal{J}_3 = \{1, 2, 3\}$)*:*

$$\dot{x} = \begin{cases} Ax - b & x \in X_1 = \{x : K'x < -1\} \\ (A + bK')x & x \in X_2 = \{x : K'x \le 1\} \\ Ax + b & x \in X_3 = \{x : K'x > 1\} \end{cases}.$$

Assim, o sistema associado é dado por:

$$\dot{x} \ = \ A_3 x + \textstyle\sum_{i=1}^{2}(A_i - A_3)\delta_i x \ + \ b_3 + \sum_{i=1}^{2}(b_i - b_3)\delta_i,\ x \in \mathcal{B}_x,\ \delta \in \ \Delta,$$

com $A_1 = A_3 = A, A_2 = A + bK', -b_1 = b_3 = b,\ b_2 = 0,\ \Delta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. *Para* $\beta = 1$, *o politopo* $\mathcal{B}_x$ *dado pelos vértices* $\left\{ \begin{bmatrix} 0.2\beta \\ -1.2\beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.5\beta \\ -1.2\beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\beta \\ \beta \end{bmatrix} \right\}$, *o politopo* $\mathcal{B}_\delta = \mathbf{Co}(\Delta)$. *Com isso, o politopo* $\mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta$ *possui 12 vértices.*

Na abordagem $\mathcal{Q}_r$, *a matriz* $\Theta(x)$ *é obtida usando* (3.2) *nos casos* $r = 2$ *e* $r = 4$, *isto é,* $d = 1$ *e* $d = 2$, *respectivamente. Foram consideradas as matrizes afins* $\Theta_0 = \begin{bmatrix} x_1 I_2 \\ x_2 I_2 \end{bmatrix}$ *e* $\Theta_1 = \begin{bmatrix} x_1 I_2 & x_2 I_2 \end{bmatrix}$.

Satisfeitas as condições do Teorema 4.1, a Figura 1 ilustra o domínio de atração desse sistema. No lado esquerdo, as regiões Υ_{Q_2} *e* Υ_{biq} *mostram a semelhança dos resultados da abordagem* $\mathcal{Q}_2$ *e biquadrática, respectivamente. A figura no lado direito ilustra que a região* Υ_{Q_4} *(obtida na abordagem* $\mathcal{Q}_4$*) é maior que aquela obtida em* Υ_{Q_2}.

Figura 1: Estabilidade $\mathcal{Q}_2$ e $\mathcal{Q}_4$ para o pêndulo invertido.

Dado o politopo $\mathcal{B}_x$ definido pelo seus vértices (com $\beta > 0$) e usando a ferramenta LMI do software SCILAB, o domínio de atração ($\Gamma \subset \mathcal{B}_x$) é obtido resolvendo o problema de otimização convexa seguindo as condições do Teorema 4.1 para cada valor de β fornecido. A região Γ é otimizada quando o valor de β seja o máximo possível, realizando assim um processo iterativo. Essa região será maior quanto maior for o número de vértices do politopo, entretanto haverá um maior esforço computacional no processamento dos programas.

Outros exemplos de sistemas com saturação foram testados mostrando resultados menos conservadores na abordagem $\mathcal{Q}_r$. Se $r = 2$ os resultados são comparáveis a abordagem biquadrática. Já se $r > 2$, as regiões são maiores em muitos dos casos estudados.

6. Conclusões

Neste trabalho é apresentado o conceito de estabilidade $\mathcal{Q}_r$ para análise de sistemas chaveados. Para fazer a análise regional e estimar o domínio de atração desses sistemas, é usada uma função de Lyapunov de tipo polinomial, $v(x) = x^{'}\mathcal{P}(x)x$, comum a todos os subsistemas do sistema chaveado e independente das regiões do estado, onde a matriz $\mathcal{P}(x)$ é obtida resolvendo um problema de otimização usando LMIs.

O fato de se trabalhar com uma função de Lyapunov comum e polinomial diferencia a metodologia aqui apresentada de outras metodologias ([2, 7]) que são convenientes para a análise global desses sistemas e utilizam funções de Lyapunov quadráticas diferentes para cada subsistema, porém muito restritivas para a determinação de domínios de atração.

A eficácia do conceito de estabilidade $\mathcal{Q}_r$ é mostrada nos gráficos do exemplo trabalhado, mostrando ser uma abordagem promissora que fornece resultados menos conservadores. Quanto maior é a ordem da função de Lyapunov, maior será a região de estabilidade obtida.

Quando $r = 2$ a estrutura da função de Lyapunov é similar que na abordagem biquadrática, porém, a matriz P obtida nas condições do Teorema 4.1 será diferente e com isto se obterá uma região de estabilidade diferente (e com áreas similares).

A metodologia apresentada é muito apropriada para obter estimativas de regiões de atração limitadas. Estudos posteriores abordarão o problema de estimar domínios de atração ilimitados de sistemas chaveados com esse enfoque.

Agradecimentos

A autora agradece aos referees anônimos por suas valiosas observações e sugestões.

Abstract. This works studies the $\mathcal{Q}_r$ stability analysis and calculates the attraction domain of a class of hybrid systems known as switched systems. This concept uses a polynomial Lyapunov function that is dependent of the state and different from the conventional quadratic one. The problem to be solve is represented as a convex optimization problem in terms of linear matrix inequalities (LMIs). Numerical results are given to illustrate a less conservative than the bi-quadratic approach when the stability regions are calculated for a given example.

Referências

[1] S. Boyd, L. Ghaoui, E. Feron e V. Balakrishnan, "Linear matrix inequalities in systems and control theory", SIAM, Philadelphia, 1994.

[2] M. Johansson, "Piecewise Linear Control Systems", Ph.D. thesis, Lund Institute of Technology, Lund, Sweden, 1999.

[3] H.K. Khalil, "Nonlinear systems", Prentice-Hall, New Jersey, 1996.

[4] S. Palomino, D. Coutinho, A. Trofino e J.E.R Cury, Computation of Stability regions using LMIs for Dynamical systems with Saturation, em "IX International Symposium on Dynamics Problems on Mechanics - IX DINAME", Florianópolis, 2001.

[5] S. Palomino Bean, D. Coutinho, A. Trofino e J.E.R Cury, Stability Analysis and Guaranteed Domain of Attraction for a class of Hybrid Systems: an LMI Approach, *Int. Journal of Nonlinear Control*, **13**, No. 5 (2003), 465-481.

[6] S. Palomino Bean, Relatório Técnico, Depto. de Matemática, CFM, UFSC, Florianópolis, 2002. (disponível em www.mtm.ufsc.br/∼palomino)

[7] S. Pettersson e B. Lennartson, Exponential Estability of hybrid systems using piecewise quadratic Lyapunov functions resulting in an LMI problem, em "Proc. of the 14th IFAC", Beijing, China, 1999.

[8] A. Trofino, Robust Stability and domain of attraction of uncertain Nonlinear Systems, em "Proc. of the American Control Conference", Chicago, 2000.

[9] A. Trofino e C.E. de Souza, Biquadratic Stability of uncertain linear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **46**, No. 8 (2001), 1303-1307.

[10] E. Ponce, D. Pagano e J. Aracil, Bifurcaciones en un Péndulo Invertido Controlado por Realimentación de Estados, em "Proc. of the XIII Automation Brazilian Congress", Florianópolis, 2000.

[11] V.A. Yakubobich, S-procedure in Nonlinear control theory, *Vestnik Leningradskogo Universiteta, Ser. Matematika*, (1971), 62-77.