

Métodos de Diferenças Finitas de Direções Alternadas Implícitos para Modelagem de Águas Subterrâneas

M.R. CORRÊA¹, A.F.D. LOULA, E.L.M. GARCIA, Laboratório Nacional de Computação Científica - LNCC, Programa de Doutorado em Modelagem Computacional, Av. Getúlio Vargas 333, Quitandinha, 25651-075 Petrópolis, RJ, Brasil.

Resumo. Neste trabalho, são apresentados Métodos de Diferenças Finitas de Direções Alternadas (ADI) aplicados ao problema de escoamento de substâncias miscíveis em meios porosos com fontes singulares. Uma técnica de remoção de singularidades é apresentada como opção para a recuperação das taxas de convergência quadráticas típicas de problemas regulares. Resultados numéricos são apresentados comprovando as taxas de convergência previstas para a aproximação da pressão e ilustrando a aplicação da metodologia proposta na simulação do transporte de poluentes.

1. Introdução

A pesquisa de novos métodos computacionais e o desenvolvimento de programas de computação de alto desempenho para a simulação de problemas de escoamentos em águas subterrâneas é um tema de grande interesse atual, dadas, por um lado, a importância desta enorme fonte de água potável e por outro, a necessidade de uma gestão eficiente e segura deste recurso. Neste contexto, a simulação computacional dos processos hidrológicos é de grande valia para melhor caracterização de aquíferos e também na proteção e remediação em casos de derrame de contaminantes no solo.

O modelo matemático considerado é composto por um sistema acoplado de equações diferenciais parciais consistindo basicamente de um subsistema elíptico, proveniente do balanço de massa da fase fluida mais a lei de Darcy, e da equação de transporte, que expressa a concentração do fluido injetado. Em tal modelo, o fluxo d'água se dá de duas maneiras — através da fronteira, determinando condições de contorno, ou através de fontes ou poços de extração, também designados como pontos de injeção e produção, respectivamente. Tais pontos singulares são representados matematicamente através do funcional linear Delta de Dirac, ocasionando uma singularidade e, conseqüentemente, uma maior dificuldade para a sua aproximação.

Neste trabalho apresentamos Métodos de Diferenças Finitas de Direções Alternadas (ADI) aplicados ao problema de escoamento de substâncias miscíveis em

¹maicon@lncc.br; bolsista de Doutorado FAPERJ.

meios porosos com fontes singulares, associado a uma técnica de remoção de singularidades. Ao final são realizadas simulações computacionais do problema de injeção de um traçador no modelo dos cinco poços (modelo utilizado para a simulação da extração de petróleo, escolhido devido ao grande número de experimentos computacionais existentes na literatura – [1, 2]) e de um problema de contaminação de um aquífero.

2. Descrição do Problema

Consideremos o escoamento de dois fluidos incompressíveis, miscíveis, em um meio poroso rígido definido no domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, representando um reservatório, de forma que inicialmente os poros estão preenchidos com um fluido ao qual chamaremos de residente. De forma seqüencial o segundo fluido é injetado causando a expulsão do fluido residente. A concentração do fluido injetado é encontrada através da resolução do seguinte problema:

Problema C : *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado com contorno regular $\partial\Omega$ de normal exterior \mathbf{n} e $T > 0$ um número fixo. Encontrar o campo de concentração $c : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\varphi \frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}c) - \nabla \cdot (D\nabla c) = q \quad \text{em } \Omega \times (0, T), \quad (2.1)$$

com as condições de contorno e inicial

$$\begin{aligned} D\nabla c \cdot \mathbf{n} &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T) \\ c(\mathbf{x}, 0) &= c_0(\mathbf{x}) \quad \text{em } \Omega \end{aligned}$$

e a velocidade de Darcy $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada pela solução do subproblema elíptico

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = f \quad \text{em } \Omega \times (0, T) \quad (2.2)$$

$$\mathbf{u} = -\frac{k}{\mu} \nabla p \quad \text{em } \Omega \times (0, T) \quad (2.3)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \quad (2.4)$$

onde $p : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ é a pressão no poro, φ e k são a porosidade e a permeabilidade do meio, respectivamente, $\mu : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função limitada que representa a viscosidade da mistura, f e q são as fontes singulares e $D : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^4$ é o tensor difusão-dispersão.

A dependência da viscosidade da mistura com relação à concentração do fluido injetado é dada por $\mu(c) = \mu_{\text{res}}[1 - c + M^{1/4}c]^{-4}$, onde a taxa de mobilidade M é definida como $M = \mu_{\text{res}}/\mu_{\text{inj}}$, com μ_{res} e μ_{inj} representando as viscosidades do fluido residente e injetado, respectivamente. O tensor difusão-dispersão é dado por

$$D = D(\mathbf{u}) = \alpha_m I + |\mathbf{u}| (\alpha_l E(\mathbf{u}) + \alpha_t E^\perp(\mathbf{u})),$$

com

$$E(\mathbf{u}) = \frac{1}{|\mathbf{u}|^2} \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}, \quad E^\perp(\mathbf{u}) = I - E(\mathbf{u}),$$

onde α_m , α_l e α_t são os coeficientes de difusão molecular, dispersão longitudinal e dispersão transversal, respectivamente.

Na resolução numérica do Problema C é comum fornecer a velocidade de Darcy calculada em um passo de tempo imediatamente anterior ao atual. Assim, podemos desacoplar o subsistema elíptico e para um dado $t \in [0, T]$ fixo, formular o problema

Problema P : *Dados a permeabilidade k , a viscosidade μ e uma fonte f , encontrar o campo de pressão $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$-\nabla \cdot \left(\frac{k}{\mu} \nabla p \right) = f \quad \text{em } \Omega. \quad (2.5)$$

com a condição de contorno

$$\nabla p \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega$$

Esta formulação, envolvendo apenas o campo p , obtida a partir da substituição da lei de Darcy (2.3) em (2.2) e (2.4), é normalmente referida como equação da pressão.

3. Equação da Pressão

Para o caso de coeficientes constantes a equação (2.5) pode ser reescrita como

$$-\frac{k}{\mu} \Delta p = f, \quad (3.1)$$

onde Δ representa o operador Laplaciano em duas dimensões

3.1. Resolução via Diferenças Finitas

Tomando uma partição uniforme do domínio de forma que uma malha regular com dimensão característica h seja obtida, podemos aproximar o Laplaciano no nó (i, j) através do operador Laplaciano discreto com cinco nós

$$\Delta_h = \delta_x^2 + \delta_y^2,$$

onde

$$\delta_x^2[p_{i,j}] = \frac{p_{i+1,j} + 2p_{i,j} + p_{i-1,j}}{h^2}, \quad \delta_y^2[p_{i,j}] = \frac{p_{i,j+1} + 2p_{i,j} + p_{i,j-1}}{h^2}$$

e, assim, aproximar a equação (3.1) através da equação discreta

$$-\frac{k}{\mu} \Delta_h p_{i,j} = f_{i,j}. \quad (3.2)$$

Denotando $p = p(x_i, y_j)$, a solução exata para o Problema P com coeficientes constantes, e $p_h = p_{i,j}$, a solução para o problema discreto, podemos apresentar o seguinte resultado sobre convergência [5]:

$$\|p - p_h\|_{h,\infty} \leq ch^2 \|\partial^4 p\|_\infty,$$

onde $\|\partial^4 p\|_\infty$ é o máximo do módulo das derivadas quartas de p no interior do domínio. Na obtenção deste resultado, é utilizada a estimativa

$$\|\Delta_h(p - \bar{p})\|_{h,\infty} \leq \tilde{c}h^2 \|\partial^4 p\|_\infty,$$

que garante taxa quadrática para o Laplaciano do erro. Isto implica que, no cálculo da velocidade de Darcy, onde o gradiente da pressão é requerido, a utilização de um operador de segunda ordem também fornecerá taxa quadrática.

A questão é que, para o problema estudado, tais taxas não são verificadas já que a solução exata carece de regularidade devido à natureza singular da função f . Neste caso, a determinação da pressão apresenta taxa de convergência apenas linear na norma de l^2 discreto, não convergindo em l^∞ . Para contornar esta dificuldade, utilizaremos a técnica de remoção de singularidades proposta inicialmente por Douglas *et al.* em [3], para o tratamento de fontes singulares aplicado em uma aproximação por Elementos Finitos para o Problema P.

3.2. Remoção de Singularidades

Para o desenvolvimento do procedimento de remoção de singularidades propomos agora a decomposição aditiva de p em uma parte regular e uma parte singular

$$p = p^r + p^s. \quad (3.3)$$

Denotando ns o número de poços, podemos escrever

$$p^s = \sum_{i=1}^{ns} p_i^s, \quad f = \sum_{i=1}^{ns} f_i,$$

de forma que a parte singular p_i^s satisfaça ao problema de Poisson em um meio infinito sujeito à ação do termo singular f_i :

Problema Ps : Dadas a permeabilidade k , a viscosidade μ e uma fonte f_i encontrar o campo singular de pressão $p_i^s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$-\frac{k}{\mu} \Delta p_i^s = f_i \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2. \quad (3.4)$$

Escrevendo a fonte em termos do Delta de Dirac $f_i = \delta_{\mathbf{x}_i}(\bar{f}_i)$, sendo \mathbf{x}_i a posição onde se encontra a fonte e \bar{f}_i uma função constante, a solução deste problema pode então ser escrita como função da posição espacial \mathbf{x} a partir de

$$p_i^s(\mathbf{x}) = -\frac{\bar{f}_i \mu}{2\pi k} \ln(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|). \quad (3.5)$$

Substituindo (3.3) em (3.1) e utilizando o fato de que (3.4) é válida para $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, temos

$$\Delta p_i^r = 0 \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Assim, podemos escrever o problema regular como

Problema Pr : Dado ∇p^s , encontrar o campo regular de pressão $p^r : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\Delta p^r = 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \quad (3.6)$$

com a condição de contorno

$$\nabla p^r \cdot \mathbf{n} = -\nabla p^s \cdot \mathbf{n} \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega.$$

Desta forma, o Problema P, para o caso de coeficientes constantes, fica reescrito através dos Problemas Ps e Pr, onde a parte singular é avaliada analiticamente. Dada a maior regularidade da solução do Problema Pr, sua solução numérica, via Métodos de Diferenças Finitas, também deve apresentar taxas quadráticas de convergência para a pressão e para a velocidade de Darcy.

3.3. Resolução Numérica

Para o desenvolvimento do esquema ADI foi utilizada a discretização de cinco nós para o Laplaciano. O campo de pressão é determinado a partir de um processo iterativo onde, partindo de uma configuração inicial, o campo é determinado na nova iteração utilizando-se dois passos de igual tamanho, segundo o esquema de Peaceman-Rachford apresentado em [4]. No primeiro, a derivada segunda em relação a x é calculada de forma implícita enquanto os termos da derivada segunda em relação a y são avaliados a partir da configuração anterior, isto é, explicitamente. A solução intermediária assim obtida é tomada como a nova configuração inicial. Para o passo seguinte tomamos o procedimento inverso, obtendo assim a solução para a nova iteração. Quando $n \rightarrow \infty$, $p_{i,j}^n \rightarrow p_{i,j}$, solução do problema estacionário (3.2). O processo se interrompe assim que uma medida de distância entre as soluções de duas iterações consecutivas fornece um valor abaixo de uma tolerância ou quando o número máximo de iterações é atingido. Assim, denotando por τ o tamanho do passo de cada iteração, os dois passos (para cada iteração) do esquema ADI são dados por:

Primeiro Passo (Implícito em x)

$$\frac{\bar{p}_{i,j} - p_{i,j}^n}{\tau/2} - \frac{k}{\mu} (\delta_x^2[\bar{p}_{i,j}] + \delta_y^2[p_{i,j}^n]) = f_{i,j}^n.$$

Segundo Passo (Implícito em y)

$$\frac{p_{i,j}^{n+1} - \bar{p}_{i,j}}{\tau/2} - \frac{k}{\mu} (\delta_x^2[\bar{p}_{i,j}] + \delta_y^2[p_{i,j}^{n+1}]) = \bar{f}_{i,j}.$$

Desta forma, para cada passo, resolvemos um problema análogo ao unidimensional, onde a matriz dos coeficientes é tridiagonal, e reduzimos consideravelmente o esforço computacional na resolução de P.

3.3.1. Verificação da Convergência

Apresentamos os resultados obtidos para a determinação do campo de pressões e da velocidade de Darcy correspondentes ao arranjo de cinco poços em escoamentos miscíveis com razão de mobilidade unitária. Os campos foram calculados utilizando uma aproximação diretamente sobre o Problema P com coeficientes constantes, e uma para o caso de remoção de singularidades, a partir da discretização do Problema Pr. Ambas as discretizações foram realizadas a partir de uma partição uniforme de um domínio quadrado de lado $L = 1.854075$, utilizando 4×4 , 8×8 , 16×16 , 32×32 e 64×64 elementos. O critério de convergência adotado foi $\|p_h^{n+1} - p_h^n\|_{h,\infty} \leq 10^{-9}$.

As Figuras 1 e 2 apresentam os gráficos de convergência para as aproximações da pressão nas normas $\|p - p_h\|_{h,\infty}$ e $\|p - p_h\|_{h,2}$ calculados sem e com remoção de singularidades, respectivamente. Para o caso em que não há remoção, é obtida convergência apenas linear em l^2 , não havendo convergência na norma do máximo. O procedimento de remoção de singularidades recupera as taxas quadráticas em ambas as normas. O estudo de convergência para a velocidade é apresentado nas Figuras 3 e 4. Neste caso a singularidade é ainda mais severa. Como consequência a aproximação de Diferenças Finitas não apresenta convergência nem mesmo em l^2 , divergindo com taxa linear na norma do máximo, enquanto a técnica de remoção de singularidades leva a taxas de convergência também quadráticas em ambas as normas. Tais taxas também são obtidas para elementos lineares em [2], onde foi utilizada uma aproximação de Galerkin para o problema da Pressão e uma técnica de Pós-Processamento para o campo de velocidades, conjuntamente à remoção de singularidades.

4. Equação da Pressão com Coeficientes Variáveis

4.1. Redução de Singularidades

A técnica apresentada para a remoção de singularidades sobre o Problema P com coeficientes constantes pode ser adaptada à situação mais geral onde os coeficientes são variáveis, reduzindo a singularidade do problema a ser aproximado via métodos de Diferenças Finitas. Por simplicidade, introduzimos a notação $\alpha = k/\mu$. Propondo uma decomposição aditiva para cada p conforme o procedimento para o caso de coeficientes constantes

$$p = p_r + \sum_{i=1}^{ns} p_i^s,$$

temos a equação (2.5) escrita como

$$-\nabla \cdot (\alpha \nabla p^r) - \sum_{i=1}^{ns} \nabla \cdot (\alpha \nabla p_i^s) = \sum_{i=1}^{ns} f_i.$$

Tomando p_i^s como solução do Problema Ps com $k/\mu = \alpha_i$, e definindo

$$p^s = \sum_{i=1}^{ns} p_i^s; \quad \mathbf{u}_i^s = -\alpha_i \nabla p_i^s,$$

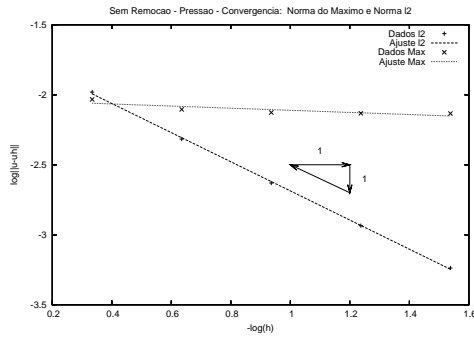


Figura 1: Pressão: sem remoção

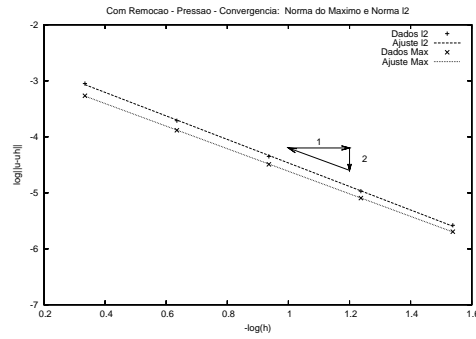


Figura 2: Pressão: com remoção

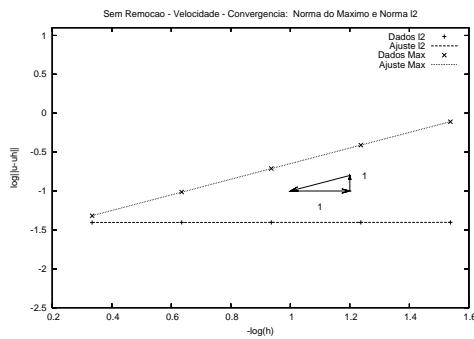


Figura 3: Velocidade: sem remoção

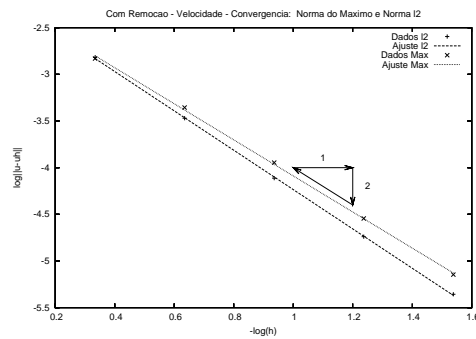


Figura 4: Velocidade: com remoção

podemos escrever o problema regular para o caso de coeficientes variáveis como

Problema Pr : Dados a permeabilidade k , a viscosidade μ e \mathbf{u}^s , encontrar o campo regular de pressão $p^r : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$-\nabla \cdot (\alpha \nabla p^r) = - \sum_{i=1}^{ns} \nabla \cdot \left[\left(\frac{\alpha}{\alpha_i} - 1 \right) \mathbf{u}_i^s \right] \quad \text{em } \Omega, \quad (4.1)$$

com a condição de contorno

$$\alpha \nabla p^r \cdot \mathbf{n} = \sum_{i=1}^{ns} \frac{\mathbf{u}_i^s}{\alpha_i} \cdot \mathbf{n} \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

O Problema Pr para o caso de coeficientes constantes, apresentado anteriormente, é obtido a partir deste com $\alpha = \alpha_i = c_{te}$. Este fato sugere que cada α_i seja tomado como o valor de α no ponto de aplicação da fonte f_i , de forma que a singularidade seja reduzida. Assim, o Problema P, para o caso de coeficientes variáveis, fica reescrito através dos Problemas Ps e Pr, onde, em Ps, tomamos $k/\mu = \alpha_i$.

5. O Problema do Transporte

Neste trabalho o Problema C é resolvido partindo dos valores do campo de concentração em um instante t_n , que define os valores de μ para o cálculo da velocidade de Darcy através de P. Com estes valores o campo c é então calculado em t_{n+1} .

5.1. Esquema ADI

A equação (2.5) para a pressão é aproximada segundo os operadores de diferenças

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial p}{\partial x} \right) \right|_{i,j} \approx \delta_x(a\delta_x)[p_{i,j}] = \frac{1}{h^2} \{ a^{(i+1/2,j)} p_{i+1,j} - [a^{(i+1/2,j)} + a^{(i-1/2,j)}] p_{i,j} + a^{(i-1/2,j)} p_{i-1,j} \},$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial y} \left(a \frac{\partial p}{\partial y} \right) \right|_{i,j} \approx \delta_y(a\delta_y)[p_{i,j}] = \frac{1}{h^2} \{ a^{(i,j+1/2)} p_{i,j+1} - [a^{(i,j+1/2)} + a^{(i,j-1/2)}] p_{i,j} + a^{(i,j-1/2)} p_{i,j-1} \}.$$

Assim, conforme o procedimento descrito na seção 3.3., os dois passos para a determinação do campo de pressão via ADI são dados por:

Primeiro Passo (Implícito em x)

$$\frac{\bar{p}_{i,j} - p_{i,j}^n}{\tau/2} - \{ \delta_x(a\delta_x)[\bar{p}_{i,j}] + \delta_y(a\delta_y)[p_{i,j}^n] \} = f_{i,j}^n.$$

Segundo Passo (Implícito em y)

$$\frac{p_{i,j}^{n+1} - \bar{p}_{i,j}}{\tau/2} - \{ \delta_x(a\delta_x)[\bar{p}_{i,j}] + \delta_y(a\delta_y)[p_{i,j}^{n+1}] \} = \bar{f}_{i,j},$$

onde $a = k/\mu$.

O termo que envolve a velocidade de Darcy em (2.1) pode ser reescrito como

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}c) = c\nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla c = cf + \mathbf{u} \cdot \nabla c$$

e, para a aproximação do gradiente, são utilizados os operadores de primeira ordem

$$\left. \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right) \right|_{i,j} \approx \delta_x[c_{i,j}] = \frac{c_{i,j} - c_{i-1,j}}{h}, \quad \left. \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right) \right|_{i,j} \approx \delta_y[c_{i,j}] = \frac{c_{i,j} - c_{i,j-1}}{h}.$$

Expandindo o termo difusivo, temos:

$$\nabla \cdot (D\nabla c) = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{11} \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{12} \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_{21} \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_{22} \frac{\partial c}{\partial y} \right).$$

As derivadas cruzadas são aproximadas por

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial c}{\partial y} \right) \right|_{i,j} &\approx \delta_x(a\delta_y)[c_{i,j}] = \frac{1}{4h^2} \{ a(i+1, j)c_{i+1, j+1} - a(i+1, j)c_{i+1, j-1} \\ &\quad - a(i-1, j)c_{i-1, j+1} + a(i-1, j)c_{i-1, j-1} \}, \\ \left. \frac{\partial}{\partial y} \left(a \frac{\partial c}{\partial x} \right) \right|_{i,j} &\approx \delta_y(a\delta_x)[c_{i,j}] = \frac{1}{4h^2} \{ a(i, j+1)c_{i+1, j+1} - a(i, j+1)c_{i-1, j+1} \\ &\quad - a(i, j-1)c_{i+1, j-1} + a(i, j-1)c_{i-1, j-1} \}. \end{aligned}$$

Denotando por Δt o intervalo de tempo utilizado, e adotando os operadores discretos apresentados, o esquema ADI para a aproximação da equação (2.1) é dado por:

Primeiro Passo (Implícito em x)

$$\begin{aligned} \varphi \frac{\bar{c}_{i,j} - c_{i,j}^n}{\Delta t/2} + u_x \delta_x[\bar{c}_{i,j}] + u_y \delta_y[c_{i,j}^n] - \delta_x(D_{11}\delta_x)[\bar{c}_{i,j}] - \delta_y(D_{22}\delta_y)[c_{i,j}^n] \\ - \delta_x(D_{12}\delta_y)[c_{i,j}^n] - \delta_y(D_{21}\delta_x)[c_{i,j}^n] = g_{i,j}^n. \end{aligned}$$

Segundo Passo (Implícito em y)

$$\begin{aligned} \varphi \frac{c_{i,j}^{n+1} - \bar{c}_{i,j}}{\Delta t/2} + u_x \delta_x[\bar{c}_{i,j}] + u_y \delta_y[c_{i,j}^{n+1}] - \delta_x(D_{11}\delta_x)[\bar{c}_{i,j}] - \delta_y(D_{22}\delta_y)[c_{i,j}^{n+1}] \\ - \delta_x(D_{12}\delta_y)[\bar{c}_{i,j}] - \delta_y(D_{21}\delta_x)[\bar{c}_{i,j}] = \bar{g}_{i,j}, \end{aligned}$$

onde as derivadas cruzadas são tomadas explicitamente em ambos os passos.

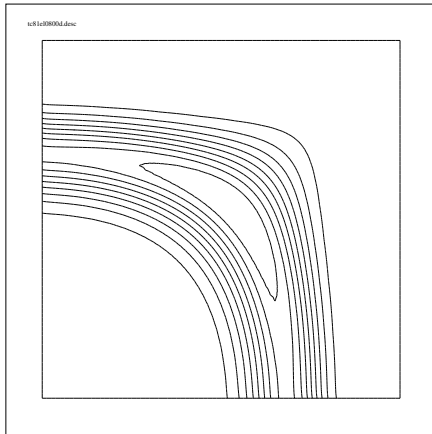
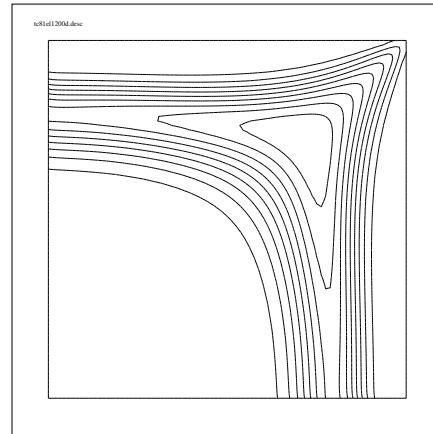
5.2. Experimentos Numéricos

Nesta seção, apresentamos os resultados obtidos para a simulação da injeção de um traçador no modelo dos cinco poços, e para a simulação da contaminação de um aquífero, utilizando o esquema ADI apresentado e a técnica de remoção de singularidades.

5.2.1. Injeção de um Traçador

O caso particular do Problema C com razão de mobilidade unitária modela processos de injeção de traçadores (elementos químicos ou radioativos).

O domínio computacional implementado é um quadrado de lado $L = 1000$ ft, onde a injeção e a produção ocorrem nos vértices inferior esquerdo e superior direito, respectivamente. A porosidade é constante e vale 0.1. A difusão molecular é desprezada e os demais coeficientes são: $\alpha_l = 10$ ft, $\alpha_t = 1$ ft, $k/\mu = 100$ mD. É injetado fluido na taxa $q = 200$ ft²/dia, de forma que em 2000 dias é injetado um volume total igual ao volume dos poros. O volume de traçador injetado é de 0.25% do volume dos poros. Nas Figuras 5 e 6 são apresentadas as curvas de nível para a concentração obtidas para uma malha de 81×81 nós em 800 e 1200 dias, com passo de um dia.

Figura 5: 81×81 nós, 800 diasFigura 6: 81×81 nós, 1200 dias

5.2.2. Contaminação de um Aquífero

Neste problema simulamos a contaminação de um aquífero confinado de dimensões $1000.0\text{m} \times 1000.0\text{m}$, limitado em seus bordos laterais por divisores d'água e cuja diferença do valor da carga hidráulica entre os bordos superior e inferior é de 1.0m . Nas posições $(250.0, 250.0)$ e $(550.0, 750.0)$ estão localizados dois poços que produzem água às taxas de $300.0\text{m}^3/\text{dia}$ e $150.0\text{m}^3/\text{dia}$, respectivamente. O regime de escoamento é determinado através de um problema análogo ao Problema P, onde utilizamos a transmissividade do aquífero, $T = 100.0\text{m}^2/\text{dia}$.

Supomos a ocorrência da infiltração de um contaminante com concentração C_0 , numa região retangular de comprimento 50.0m e largura 20.0m , localizada em $(850.0, 950.0)$. Pretende-se desativar o poço superior até que o contaminante tenha sido extraído pelo poço inferior. Para tal é estudado o transporte para os dois casos: com apenas um e com os dois poços produzindo. O domínio foi discretizado em uma malha centrada de 101×101 nós e a contaminação foi implementada como condição inicial para o problema do transporte, de forma que aos nós da faixa contaminada foi atribuída concentração igual a C_0 . Os demais dados para o problema são: $\varphi = 0.20$, $\alpha_m = 0$, $\alpha_l = 10.0\text{m}$ e $\alpha_t = 1.0\text{m}$. Em todas as simulações, foi utilizado o passo de 1 dia.

Nas Figuras 7 e 8, apresentamos as trajetórias das partículas para os dois casos (com 1 e 2 poços), indicando a região onde foi suposta a contaminação inicial. Pelas trajetórias da Figura 8, observamos que o transporte do contaminante é determinado pela dinâmica do escoamento estabelecida pelos dois poços. A Figura 9 mostra a pluma de contaminante após 500 e 1000 dias de bombeamento.

Os gráficos da Figura 10 mostram o volume do contaminante, relativo ao volume inicial, existente no reservatório em função do tempo, durante 2500 dias de bombeamento de um ou de ambos os poços. Eles evidenciam a influência do poço superior na extração do contaminante, conforme esperado pela análise da Figura 8.

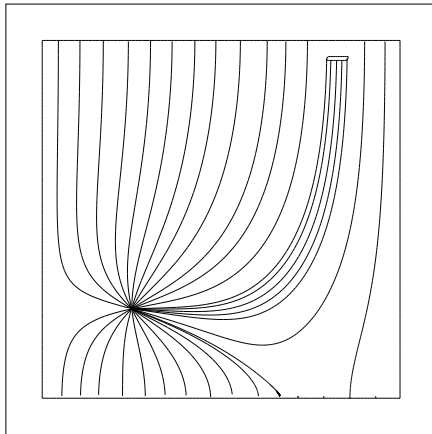


Figura 7: Trajetórias para 1 poço.

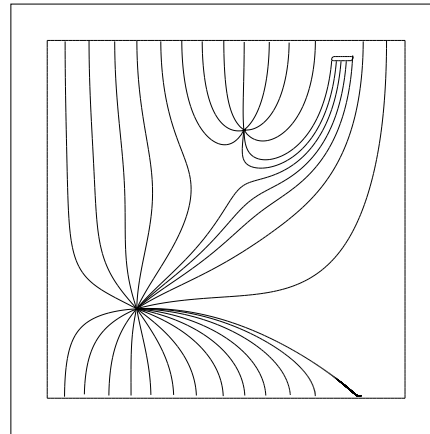


Figura 8: Trajetórias para 2 poços.

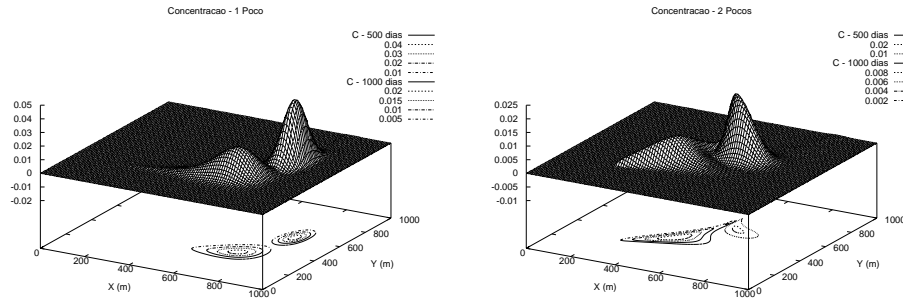


Figura 9: Transporte para 1 e 2 poços.

6. Conclusões

A resolução do problema da Pressão com coeficientes constantes e fontes singulares utilizando o esquema clássico de Diferenças Finitas fornece apenas convergência linear na norma do l^2 , não convergindo em l^∞ . Este fato é refletido diretamente no cálculo da velocidade de Darcy, necessária para a resolução do problema do Transporte. A técnica de remoção de singularidades proposta recupera as taxas de convergência quadráticas características de problemas regulares. A utilização desta técnica, conjuntamente ao emprego do esquema ADI, resulta em um método eficiente e preciso para a simulação de escoamentos e transporte de poluentes em reservatórios de águas subterrâneas.

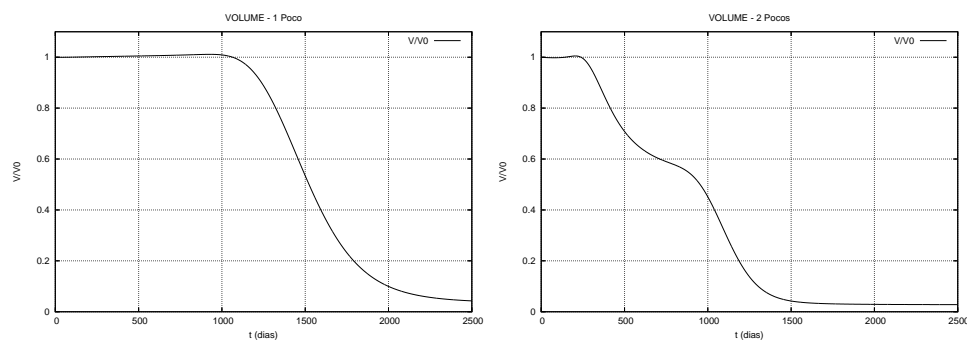


Figura 10: Volumes relativos do contaminante para bombeamento de 1 ou 2 poços.

Referências

- [1] A.F.D Loula, E.L.M. Garcia e A.L.G.A. Coutinho, Miscible displacement simulation by finite element methods in distributed memory machines, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **174** (1999), 339-354.
- [2] S.M.C. Malta, A.F.D Loula e E.L.M. Garcia, Numerical analysis of a stabilized finite element method for tracer injection simulations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **187** (2000), 119-136.
- [3] J. Douglas Jr., R.E. Ewing e M.F. Wheeler, The Approximation of the Pressure by a Mixed Method in the Simulation of Miscible Displacement, *RAIRO Analyse numérique/Numerical Analysis*, **17** (1983), 17-33.
- [4] A.R. Mitchell e D.F. Griffiths, "Finite Difference Method in Partial Differential Equations", John Wiley & Sons, New York, 1980.
- [5] J.C. Strikwerda, "Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations", Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series, California, 1989.