TEMA Tend. Mat. Apl. Comput., **6**, No. 1 (2005), 33-42.

A Classe de Grafos PI

S. ALMEIDA[1], C.P. de MELLO[2], A. GOMIDE[3], Instituto de Computação, UNICAMP, 13084-971 Campinas, SP, Brasil.

Resumo. Neste trabalho mostramos que a representação de um grafo PI, grafo interseção de triângulos entre duas retas paralelas, que não é grafo de intervalo, contém um triângulo obtusângulo. Além disso, classificamos os grafos da família de Gallai que são PI.

1. Introdução

Seja $\mathcal{F}$ uma família de conjuntos. Pode-se associar a $\mathcal{F}$ um grafo, G, da seguinte forma: cada conjunto de $\mathcal{F}$ corresponde a um vértice de G e existe uma aresta ligando dois vértices em G se, e somente se, os conjuntos correspondentes a estes vértices se intersectam. O grafo G é chamado *grafo interseção* da família $\mathcal{F}$. Como todo grafo simples é grafo interseção de alguma família de conjuntos [7], várias classes de grafos foram definidas considerando famílias com estruturas especiais. Se $\mathcal{F}$ for, por exemplo, uma família de intervalos linearmente ordenados da reta real, o grafo interseção de $\mathcal{F}$ é um *grafo de intervalo*. Considere duas retas paralelas r_1 e r_2. Se $\mathcal{F}$ for uma família de segmentos de reta com um extremo em r_1 e o outro em r_2, o grafo interseção dos elementos de $\mathcal{F}$ é o *grafo permutação*. Em [5], Corneil e Kamula generalizam a classe dos grafos permutação, permitindo que a família $\mathcal{F}$ contenha triângulos com um lado em r_1 e um vértice em r_2. O grafo interseção de $\mathcal{F}$ é chamado *grafo PI* (Point-Interval). Note que PI é, também, uma generalização dos grafos de intervalo.

Sabe-se que os grafos de intervalo são reconhecidos por algoritmos lineares [2]. Além disso, uma superclasse dos PI, os *grafos trapezóides*, que são grafos interseção de trapézios entre duas retas paralelas, também possuem algoritmos polinomiais para o seu reconhecimento [4]. Entretanto, reconhecer um grafo PI é um problema aberto [3].

Outra superclasse dos grafos PI é a classe dos grafos de *co-comparabilidade*, grafos cujo complemento é de comparabilidade. Os *grafos de comparabilidade* são aqueles que admitem uma orientação transitiva em suas arestas. Esta classe foi caracterizada por Gallai [6] através de uma família de grafos proibidos, a família de Gallai.

Na Seção 2, encontram-se conceitos necessários para as demais seções. Na Seção 3, identifica-se uma subclasse dos PI obtida restringindo os triângulos da família $\mathcal{F}$

[1]sheila@ic.unicamp.br; bolsista de Mestrado CAPES
[2]celia@ic.unicamp.br; apoio CNPQ/307856/2003-8
[3]anamaria@ic.unicamp.br

a triângulos não obtusângulos. Na Seção 4, classificam-se os grafos da família de Gallai em relação à pertinência às classes de co-comparabilidade e PI.

Em [1], encontram-se os conceitos básicos da teoria dos grafos não definidos neste artigo.

2. Preliminares

Sejam r_1 e r_2 duas retas paralelas. Chamaremos de *representação PI*, a toda representação de um grafo G onde cada vértice de G é um triângulo com um lado em r_1 e um vértice em r_2 ou um segmento de reta com um extremo em r_1 e outro r_2.

Uma característica da classe PI é a sua hereditariedade. Se G é PI, então G tem uma representação PI, R. A representação R' de um subgrafo induzido G' construída a partir de R, retirando-se os elementos (segmentos de reta ou triângulos) de R que correspondem a vértices que não pertencem a G' é, claramente, uma representação PI de G' e, sendo assim, G' é PI. Portanto, vale o seguinte lema:

Lema 2.1. *Sejam G um grafo PI e G' um subgrafo induzido por qualquer subconjunto de vértices de G. O grafo G' é PI.*

Apresentaremos a seguir relações dos grafos PI com algumas classes de grafos conhecidas e amplamente estudadas. Para tanto, duas classes precisam ser definidas: os grafos sem tripla asteroidal e os grafos fracamente cordais.

Três vértices distintos e dois a dois não adjacentes em um grafo formam uma *tripla asteroidal* quando para quaisquer dois deles existe um caminho que os liga e não passa pela vizinhança do terceiro. Um grafo que não admite tripla asteroidal é chamado *grafo sem tripla asteroidal* (STA).

Um grafo é *fracamente cordal* quando não contém C_n, $n > 4$, como subgrafo induzido.

Em [4] e [5] encontramos as relações de continência entre algumas subclasses e superclasses dos grafos PI. O conjunto dos grafos de cada classe é representado pelo seu nome.

$$\text{Intervalo} \subset \text{PI} \subset \text{Trapezóide} \subset \text{Co-comparabilidade} \tag{2.1}$$

$$\text{Trapezóide} \subset \text{Fracamente cordal} \tag{2.2}$$

$$\text{Trapezóide} \subset \text{STA} \tag{2.3}$$

O Teorema 2.1 exibe uma caracterização dos grafos de intervalo através de uma família de subgrafos proibidos [7].

Teorema 2.1. *Um grafo é de intervalo se, e somente se, não contém nenhum dos grafos da Figura 1 como subgrafo induzido.*

Em [6] Gallai apresentou a seguinte caracterização, por subgrafos proibidos, para os grafos de comparabilidade:

Teorema 2.2. *Um grafo é de comparabilidade se, e somente se, não contém um subgrafo induzido isomorfo a algum grafo da Figura 2 ou a um dos complementos dos grafos da Figura 3.*

Ao conjunto dos grafos apresentados na Figura 2 e dos complementos dos grafos da Figura 3 chamamos *família de Gallai*.

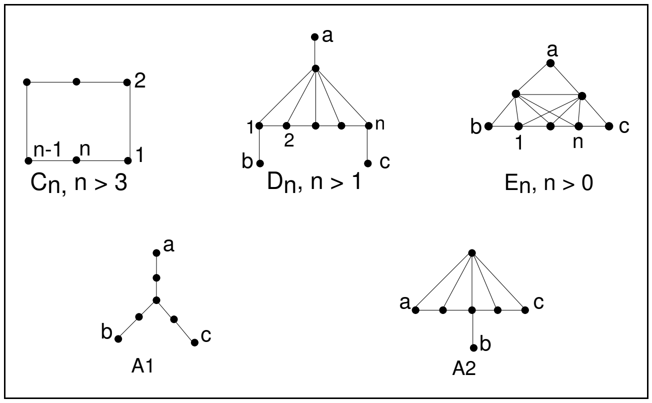

Figura 1: Grafos proibidos para a classe Intervalo.

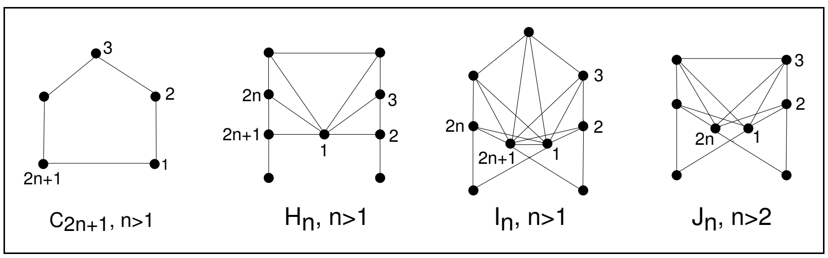

Figura 2: Grafos proibidos para comparabilidade.

3. PI-Especial

Uma restrição que pode ser imposta aos grafos PI é de que os triângulos da representação PI não possuam ângulo obtuso nos extremos do intervalo em r_1. Um triângulo com essa restrição será chamado de *triângulo não obtusângulo especial* (TNOE).

Sejam duas retas paralelas r_1 e r_2. O grafo interseção de uma família de triângulos não obtusângulos especiais (TNOEs) que possuem um vértice em r_2 e um lado em r_1 será chamado *grafo PI-especial*.

Teorema 3.1. *Um grafo G é PI-especial se, e somente se, G é grafo de intervalo.*

Demonstração. Sejam G um grafo PI-especial e R uma representação de G através da interseção de TNOEs entre duas retas paralelas r_1 e r_2. Seja $T = PED$ um triângulo de R com vértice P em r_2 e vértices E e D em r_1. Seja p a função projeção ortogonal sobre a reta r_1. Note que a união das imagens $p(\overline{PE})$ e $p(\overline{PD})$ é o intervalo $\overline{ED} = [E, D]$ da reta r_1. Dessa forma, p associa a cada TNOE de R um intervalo $\overline{ED}$ de tal forma que existe interseção entre dois intervalos se, e somente se, existe interseção entre seus respectivos TNOEs. Isso ocorre porque a projeção

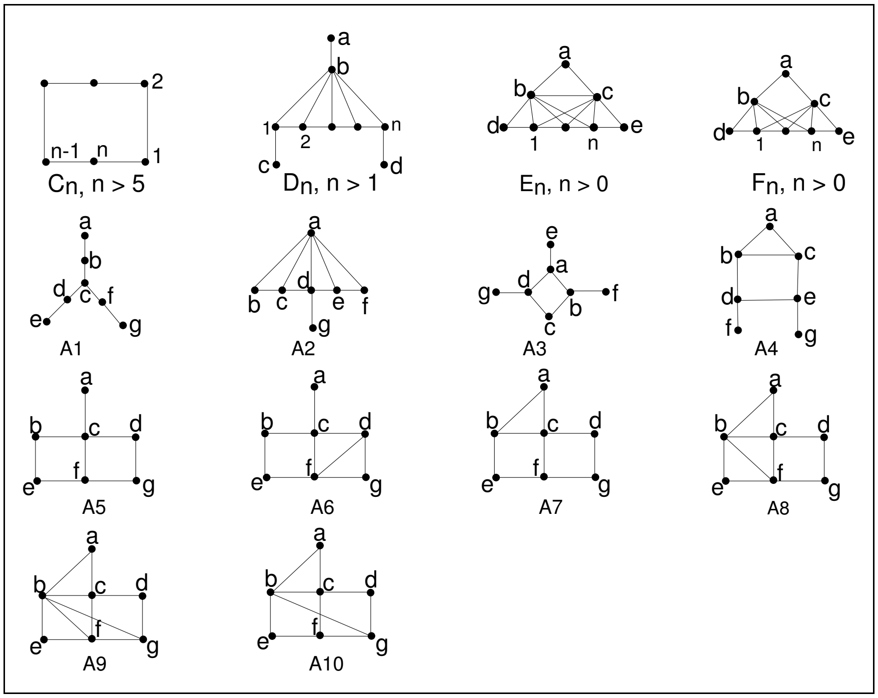

Figura 3: Complementos dos grafos proibidos para comparabilidade.

dos lados de um TNOE sobre r_1 está contida no intervalo $\overline{ED}$. Portanto, se T_x e T_y são triângulos que se intersectam em R, os lados de T_x e T_y que estão sobre a reta r_1 se intersectam em pelo menos um ponto. Assim, os lados dos triângulos que estão sobre r_1 formam uma representação de G por intervalos. Logo, G é grafo de intervalo.

Sejam G um grafo de intervalo e R uma representação de G através da interseção de intervalos de uma reta r_1. Construa uma reta r_2 paralela a r_1. Para cada intervalo $\overline{ED}$ de r_1, marque em r_2 um ponto P de tal forma que $p(\overline{PE}) \subset \overline{ED}$. Ligue os dois extremos E e D ao ponto P. Essa construção, se repetida para todos os intervalos de R, gera uma família de TNOEs. Como a projeção de cada ponto P sobre r_1 é um ponto no intervalo $\overline{ED}$, as adjacências de G foram preservadas. Logo, G é um grafo PI-especial. $\square$

Uma conseqüência do Teorema 3.1 é que a representação PI de um grafo que não é de intervalo contém um triângulo obtusângulo. Note que o segmento de reta que representa o vértice b do ciclo C_4 na Figura 4 só pode ser substituído por um triângulo obtusângulo.

Teorema 3.2. *Se G é PI e não é grafo de intervalo, então G contém C_4 como subgrafo induzido.*

Demonstração. Seja G um grafo PI que não é de intervalo. Pelo Teorema 2.1, G contém algum grafo da Figura 1 como subgrafo induzido. Mostraremos que dentre os grafos da Figura 1, apenas C_4 é PI.

De fato, pelas relações de continência (2.1) e (2.2) temos que a família C_n, $n > 4$, não é PI, pois não é fracamente cordal. Pelas relações (2.1) e (2.3), todos os outros grafos da Figura 1 (com exceção do C_4) não são PI, pois não são grafos STA (em cada grafo, a tripla asteroidal consiste dos vértices a, b e c). Finalmente, a Figura 4 apresenta uma representação PI para o grafo C_4. □

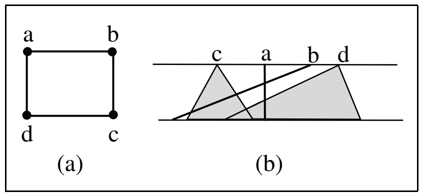

Figura 4: Uma representação PI do grafo C_4.

4. Família de Gallai ∩ PI

Nesta seção, identificamos os grafos da família de Gallai que são de co-comparabilidade e, dentre estes, os que são PI. O Teorema 4.1 descreve os grafos pertencentes à família de Gallai que são de co-comparabilidade.

Teorema 4.1. *Dentre os grafos da família de Gallai, os grafos H_n e I_n, $n > 1$, e J_n, $n > 2$, apresentados na Figura 2 e aqueles com complemento na Figura 5 são de co-comparabilidade.*

Demonstração. Primeiro, consideramos os grafos da Figura 2.

- C_{2n+1}, $n \geq 2$: Os ciclos C_{2n+1}, $n \geq 2$, não são grafos de co-comparabilidade. pois não são perfeitos e sabe-se que todo grafo de co-comparabilidade é perfeito [7].
- H_n e I_n, $n \geq 2$: Essas duas famílias pertencem à classe dos grafos de intervalo. Nas Figuras 6 e 7 estão as representações através da interseção de intervalos para os grafos dessas famílias, logo são grafos de intervalo. Portanto, pela relação de continência (2.1), H_n e I_n, $n \geq 2$, são grafos de co-comparabilidade.
- J_n, $n \geq 3$: Os grafos da família J_n, $n \geq 3$, são grafos PI (Figura 8). Novamente, pela relação de continência (2.1), os grafos J_n, $n \geq 3$, são grafos de co-comparabilidade.

Portanto, da Figura 2, apenas a classe C_{2n+1}, $n \geq 2$, é proibida para co-comparabilidade. Para decidir se os grafos cujo complemento aparece na Figura 3, são de co-comparabilidade, basta verificar se os grafos dessa figura são de comparabilidade. Vejamos cada caso:

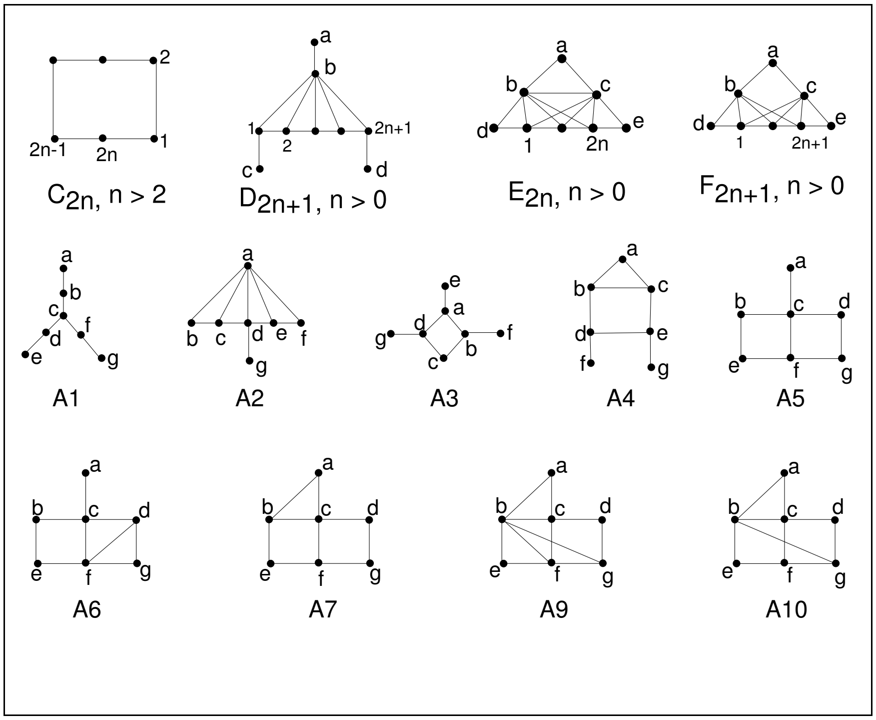

Figura 5: Grafos cujo complemento é de co-comparabilidade e pertence a família de Gallai.

• C_n, $n \geq 6$: Pelo Teorema 2.2, os ciclos C_{2n+1}, $n \geq 2$, são proibidos para comparabilidade. Seja C_{2n}, $n \geq 3$, um ciclo com vértices $\{1, \ldots, 2n\}$ tal que i é adjacente a $i+1$, $1 \leq i < 2n$. A orientação de C_{2n}, tal que $2i$, $1 \leq i \leq n$, é fonte e $2i+1$, $1 \leq i \leq n-1$ é sumidouro, é uma orientação transitiva.

Portanto, $\overline{C_{2n+1}}$, $n \geq 2$ são proibidos para co-comparabilidade e $\overline{C_{2n}}$, $n \geq 3$, é uma família de grafos de co-comparabilidade.

• D_n, $n > 1$: Como H_n, $n > 1$ não é de comparabilidade e os grafos D_{2n}, $n > 1$, contêm H_n, $n > 1$ como subgrafo induzido (basta retirar o vértice a do grafo D_n da Figura 3), pelo Teorema 2.2, D_{2n}, $n > 1$, não são grafos de comparabilidade. Quanto ao grafo D_2 é fácil verificar que não é possível exibir uma orientação transitiva para suas arestas.

Agora, e no restante desse documento, uma aresta orientada de um vértice qualquer x para um vértice y será indicada pelo par ordenado $[x, y]$. Um grafo D_{2n+1}, $n \geq 1$ com os vértices rotulados como na Figura 3, admite a seguinte orientação transitiva: $[a, b]$, $[i, b]$ $(1 \leq i \leq 2n+1)$, $[1, c]$, $[2n+1, d]$ e as arestas do caminho $(1, 2, \ldots, 2n, 2n+1)$, orientadas de forma que todos os vértices ímpares sejam fontes e os vértices pares sejam sumidouros.

Assim, a família $\overline{D_{2n}}$, $n \geq 1$, é proibida para co-comparabilidade e os grafos $\overline{D_{2n+1}}$, $n \geq 1$, são grafos de co-comparabilidade.

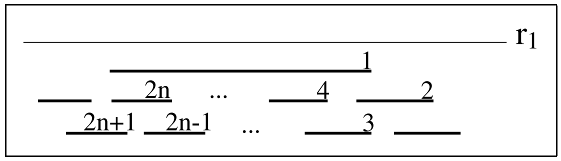

Figura 6: Representação da família H_n através da interseção de intervalos.

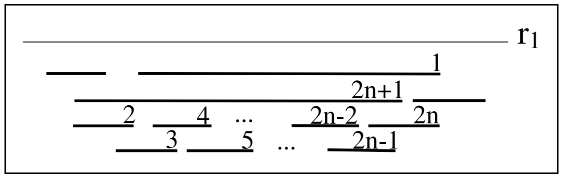

Figura 7: Representação da família I_n através da interseção de intervalos.

- E_n, $n \geq 1$: Os grafos E_{2n+1}, $n \geq 1$, contêm I_{n+1}, $n \geq 1$, como subgrafo induzido (basta retirar o vértice a do grafo E_n da Figura 3) e, portanto, pelo Teorema 2.2, não são grafos de comparabilidade. Quanto ao grafo E_1, é fácil verificar que não existe uma orientação transitiva para suas arestas. Para os grafos E_{2n}, $n \geq 1$, se rotularmos os vértices como na Figura 3, uma orientação transitiva pode ser feita orientando as arestas do caminho $(1, 2, \ldots, 2n)$ de forma que todos os vértices pares sejam fontes, os ímpares sumidouros e as demais arestas orientadas da seguinte forma: $[d, 1]$, $[2n, e]$, $[a, b]$, $[d, b]$, $[c, b]$, $[c, e]$, $[c, a]$, $[c, i]$, $[i, b]$, $1 \leq i \leq 2n$.

Portanto, $\overline{E_{2n}}$, $n \geq 1$ é uma família de grafos de co-comparabilidade e $\overline{E_{2n+1}}$, $n \geq 0$, são grafos proibidos para co-comparabilidade.

- F_n, $n \geq 1$: Os grafos F_{2n}, $n \geq 2$, possuem J_{n+1}, $n \geq 2$ como subgrafo induzido. Logo, pelo Teorema 2.2, não são grafos de comparabilidade. Quanto ao grafo F_2 é fácil verificar que não existe uma orientação transitiva para suas arestas. Uma possível orientação transitiva para a família F_{2n+1}, $n \geq 0$, (com os vértices de F_{2n+1} rotulados como na Figura 3) é: $[a, b]$, $[d, b]$, $[a, c]$, $[e, c]$, $[i, b]$, $[i, c]$ $(1 \leq i \leq 2n+1)$, $[1, d]$, $[2n+1, e]$ e as arestas do caminho $(1, 2, \ldots, 2n, 2n+1)$, orientadas de forma que os vértices ímpares sejam fontes e os pares sejam sumidouros.

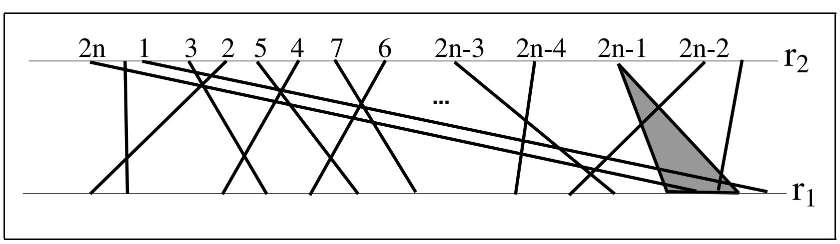

Figura 8: Representação PI da família J_n.

Portanto, $\overline{F_{2n+1}}$, $n \geq 0$, é uma família de grafos de co-comparabilidade e $\overline{F_{2n}}$, $n \geq 1$, são grafos proibidos para co-comparabilidade.

- A_i, $1 \leq i \leq 10$, $i \neq 8$: A Figura 9 mostra uma orientação transitiva para cada um desses grafos. Portanto são grafos de comparabilidade e seus complementos são grafos de co-comparabilidade.

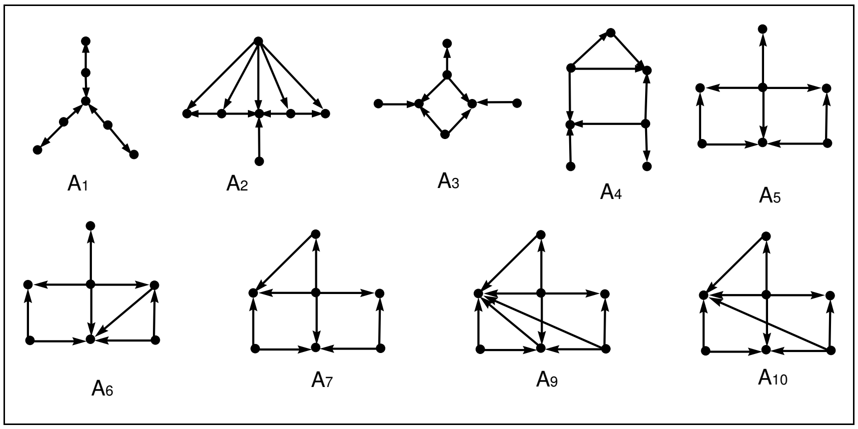

Figura 9: Orientações transitivas para os grafos $A_1, \ldots, A_7, A_9$ e A_{10}.

- A_8: O grafo A_8 é isomorfo ao grafo $\overline{F_2}$. Logo, pelo Teorema 2.2, A_8 não é grafo de comparabilidade e $\overline{A_8}$ não é grafo de co-comparabilidade. $\square$

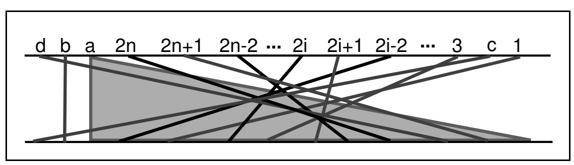

Figura 10: Uma representação PI da família $\overline{D_{2n+1}}$.

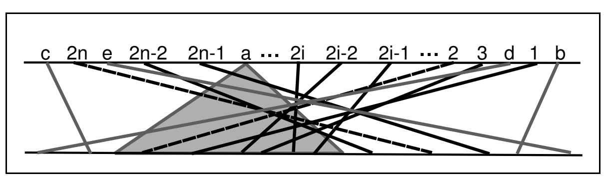

Figura 11: Uma representação PI da família $\overline{E_{2n}}$.

Dentre os grafos da família de Gallai que são de co-comparabilidade, podemos encontrar alguns grafos (ou algumas famílias de grafos) que são PI. O Teorema 4.2

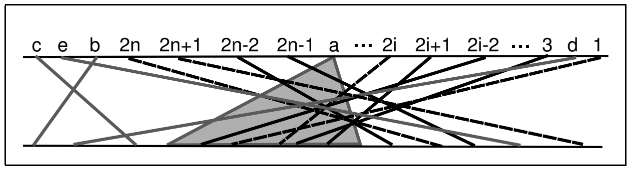

Figura 12: Uma representação PI da família $\overline{F_{2n+1}}$.

demonstra que $\overline{C_{2n}}$, $n \geq 3$, são os únicos grafos de co-comparabilidade pertencentes à família de Gallai que são PI.

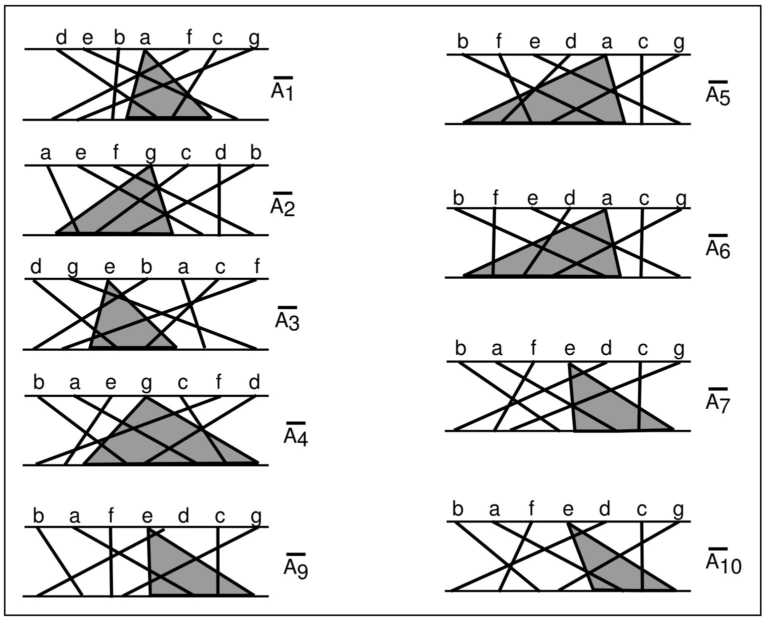

Figura 13: Uma representação PI para o complemento dos grafos $A_1..A_7$, A_9 e A_{10}.

Teorema 4.2. *Todo grafo G que é de co-comparabilidade e pertence à família de Gallai é PI, exceto* $\overline{C_{2n}}$, $n \geq 3$.

Demonstração. Da demonstração do Teorema 4.1, temos que J_n, $n > 2$, é PI (Figura 8), H_n e I_n, $n > 1$ são grafos de intervalo (Figuras 6 e 7), portanto, são PI.

Vamos analisar os grafos cujo complemento aparece na Figura 5.

É conhecido que $\overline{C_{2n}}$, $n \geq 3$, não é trapezóide [5]. Pela relação de continência (2.1), $\overline{C_{2n}}$, $n \geq 3$, não é PI.

As Figuras 10, 11 e 12 apresentam, representações PI das famílias $\overline{D_{2n+1}}$, $\overline{E_{2n}}$ e $\overline{F_{2n+1}}$, (respectivamente). Portanto os complementos de D_{2n+1}, E_{2n} e F_{2n+1}, com

$n \geq 1$, são grafos PI.

A Figura 13 apresenta uma representação PI para os grafos $\overline{A_1}, \ldots, \overline{A_7}, \overline{A_9}$ e $\overline{A_{10}}$.

Desta forma, concluimos que todos os grafos de co-comparabilidade que pertencem à família de Gallai são PI, exceto os grafos $\overline{C_{2n}}$, $n \geq 3$. □

Abstract. In this work we show that a triangle representation of a PI graph that is not interval graph must contains a obtuse triangle. We also classify the graphs of the Gallai family that are PI graphs.

Referências

[1] J.A. Bondy, U.S.R. Murty, "Graph Theory with Applications", American Elsevier, New York, 1979.

[2] K.S. Booth, G.S. Lueker, Testing for the consecutive ones property, interval graphs and graph planarity using PQ-tree algorithms, *J. Comp. and Syst. Sci.*, **13** (1976), 335-379.

[3] A. Brandstädt, V. Le, J. Spinrad, "Graph Classes - a Survey", SIAM, Monographs on Discrete Math. and Applications, 1999.

[4] F. Cheah, D.G. Corneil, On the structure of trapezoid graphs, *Discrete Applied Math.*, **66** (1996), 109-133.

[5] D.J. Corneil, P.A. Kamula, Extensions of permutation and interval graphs, *Congressus Numerantium*, **58** (1987), 267-275.

[6] T. Gallai, Transitiv Orientierbare Graphen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung*, **18** (1967), 25-66.

[7] M.C. Golumbic, "Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs", Academic Press, New York, 1980.