

Teoria Espectral dos Grafos: um Híbrido entre a Álgebra Linear e a Matemática Discreta e Combinatória com Origens na Química Quântica

N.M.M. de ABREU¹, PEP/COPPE, UFRJ, Ilha do Fundão, 25000-000 Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Resumo: A partir de um breve histórico da Teoria Espectral dos Grafos, TEG, este artigo apresenta os conceitos básicos da teoria e mostra como é possível, com o uso de simples resultados da Álgebra Linear, determinar propriedades de um grafo através da correspondência entre a estrutura do grafo e o espectro de sua matriz de adjacência ou de sua matriz laplaciana. Além disso, indica alguns relacionamentos de TEG com outros ramos da Matemática, das Engenharias e da Ciência da Computação, apresenta uma série de problemas em aberto e aponta os possíveis desenvolvimentos da área.

Palavras-chave: polinômio característico de um grafo, autovalores de grafos e laplaciano de grafos

1. Introdução

A Teoria Espectral dos Grafos, TEG, teve origem na Química Quântica quando, em 1931, Huckel produziu um modelo teórico para um problema a partir de moléculas de hidrocarbonetos não saturadas em que os níveis de energia de certos elétrons eram representados por autovalores de um grafo, [12]. Mas, segundo Cvetković, Rowlinson e Simić [12], somente em 1957, com um artigo de Collatz e Sigogowitz foi iniciada a fundamentação teórica de TEG, sedimentada em 1971, com a tese de doutorado de Cvetković. Até meados de 1980, cerca de 700 trabalhos já haviam sido publicados por pesquisadores matemáticos e químicos, época em que surge o primeiro livro, *Spectra of Graphs: Theory and Application*, devido a D. Cvetković, M. Doob e H. Sachs [9]. Nas últimas duas décadas, a quantidade de referências sobre grafos espectrais vêm crescendo exponencialmente, inclusive o número de livros, com destaque para [8], [10], [12], [20] e [13]. Diversas técnicas espectrais são utilizadas para tratar de problemas em grafos, como os auto-espacos, a técnica do complementar de grafos-estrela e a do entrelaçamento, [8] e [15]. Há ligações entre Teoria Espectral dos Grafos e outros ramos da Combinatória, da Álgebra e da Geometria, podendo ser classificada como parte da Teoria Algébrica dos Grafos e da Combinatória Algébrica. Suas principais aplicações aparecem em Química [19], [29],

¹nair@pep.ufrj.br

[10], [12] e [14]; Física e Engenharia Elétrica [10]; Estatística [5]; Otimização Combinatória [11], [7] e Ciências da Computação [11], [2] e [11]. Neste texto são apresentados conceitos básicos de grafos e de seus espectros mostrando como é possível, com o uso de simples resultados da Álgebra Linear, determinar propriedades em grafos pelo relacionamento de suas estruturas e dos espectros de suas matrizes de adjacência e laplaciana, [21], [26], [17], [30] e [20]. Diversos problemas em aberto são levantados e alguns resultados do grupo de pesquisa da PEP/COPPE/UFRJ, em colaboração com pesquisadores do IMUFF, da ENCE/IBEG, da PUC-Rio, do IME-Rio e da UERJ, são apresentados em [25], [27] e [2]. Finalmente, são apontados futuros desenvolvimentos da área.

2. Conceitos Básicos

Nesta seção, são apresentados os conceitos básicos da Álgebra Linear e da Teoria dos Grafos estritamente necessários à compreensão do texto. Em Álgebra Linear, os livros utilizados são [22] e [18] e em Matemática Discreta, [26]. Para aqueles interessados em Teoria dos Grafos, recomenda-se [21], [28], [17] e [6].

Considere o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem n sobre o corpo \mathbb{R} . Seja A uma matriz quadrada de ordem n . Um *autovalor de A* é um escalar λ tal que $Ax = \lambda x$, para $x \neq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$. Todo $x \in \mathbb{R}^n$ que satisfaça esta equação é denominado um *autovetor de A* associado ao autovalor λ . Seja I_n a matriz identidade de ordem n . O polinômio de grau n associado a A ,

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n),$$

é denominado *polinômio característico de A* . A *multiplicidade algébrica* de λ é o número de vezes que λ ocorre como raiz de $p_A(\lambda)$. Do que foi apresentado, verifica-se que os n autovalores de A , não necessariamente distintos, são as raízes do seu polinômio característico. Sabe-se que os coeficientes a_0 de $p_A(\lambda)$, associado ao termo de mais alto grau, é igual a 1; a_1 , associado ao termo de grau $n - 1$, é igual ao simétrico das somas de suas raízes; a_n , o termo independente, é igual ao $\det(A)$ que, por sua vez, é o produto das raízes de $p_A(\lambda)$. Além disso, todas as raízes do polinômio característico de uma matriz simétrica são reais. Uma matriz A simétrica é *semidefinida positiva*, se para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, $x^t Ax \geq 0$. Para tais matrizes, os autovalores são maiores ou iguais a 0 e a recíproca é verdadeira. Uma matriz simétrica A é *reduzível* quando existe uma matriz de permutação P tal que $P^{-1}AP$ é particionada em blocos diagonais. De outra forma, a matriz A é *irreduzível*. Do Teorema de Peron e Frobenius, decorre que, para matrizes irreduzíveis não-negativas, sempre existe um autovalor positivo, raiz simples do polinômio característico, tal que o módulo de qualquer outro, não o excede, [18]. Um *grafo* $G = (V, E)$ é uma estrutura algébrica, onde V é um conjunto discreto, cujos elementos são denominados *vértices* e E , um conjunto de subconjuntos de dois elementos de V , chamados *arestas* de G . Os grafos podem ser orientados, caso em que E é um subconjunto de $V \times V$; podem possuir laços, quando em E são permitidos a presença de pares com coordenadas iguais; ou ainda G pode,

nos casos mais gerais, possuir múltiplas arestas, ou tê-las valoradas, [21] e [17]. Este artigo trata apenas dos grafos simples, não-orientados, sem laços ou arestas múltiplas. Diz-se que $G = (V, E)$ é um *grafo de ordem n* , quando $|V| = n$. Cada aresta de G é denotada por $e = \{v, w\}$, quando $v, w \in V$ são *vértices adjacentes* e e , *aresta incidente a v e a w* . O *grau* de v , $d(v)$ é o número de arestas incidentes em v . Um grafo G é *completo*, quando $|V| = n$ e $|E| = C_{n,2}$, cuja notação é $G = K_n$. O grafo $G_1 = (V_1, E_1)$ é um *subgrafo* de G se $V_1 \subseteq V$ e $E_1 \subseteq E$; se G_1 contém todas as arestas $\{x, y\} \in E$, $x, y \in V_1$, G_1 é um *subgrafo induzido* de G ; se contém todos os vértices, G_1 é um *subgrafo parcial* ou *gerador* de G . Um *caminho simples de comprimento k* em G é dado por uma sequência de $k + 1$ vértices distintos $u = [v_0, v_1, \dots, v_k]$ tal que $\{v_i, v_{i+1}\} \in E(G)$. Quando o caminho é fechado, isto é, começa e termina no mesmo vértice, ele é chamado de *ciclo* de G . Quando G é, ele próprio, um caminho simples de comprimento $n - 1$, G é chamado *caminho* e denotado por P_n . Definição análoga é dada para o *ciclos*, C_n , que são grafos constituídos por um único caminho simples e fechado de comprimento n . Um subgrafo S de G é *maximal*, com relação a uma dada propriedade, se não existir nenhum subgrafo de G que contenha S , satisfazendo a propriedade. Um grafo G é *conexo*, quando para qualquer par de vértices existe um caminho que os liga. Caso contrário, G é *desconexo*. Uma *componente conexa de G* é um subgrafo induzido maximal conexo. *Grafos elementares* são aqueles cujas componentes conexas são ciclos ou K_2 . *Árvores* são grafos conexos sem ciclos e *florestas* são grafos cujas componentes conexas são árvores. Um *grafo bipartido* tem seu conjunto de vértices particionado em dois subconjuntos não vazios V_1 e V_2 tal que $E \subseteq V_1 \times V_2$. Quando $E = V_1 \times V_2$, $|V_1| = r$ e $|V_2| = s$, G é *bipartido completo*, denotado por $K_{r,s}$ e, neste caso, $r + s = n$. É intuitivo representar grafos por figuras, como $G = (V, E)$, da Figura 1, onde $V = \{a, b, c, d, e\}$ e $E = \{(a, b), (a, c), (b, d), (c, d), (d, e)\}$. Porém, um grafo pode também ser representado por matrizes. Sejam o conjunto de vértices $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ e o de arestas $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ de G . A *matriz de adjacência* de G , $A(G)$, é uma matriz quadrada de ordem n , cujas entradas são dadas por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } \{v_i, v_j\} \in E(G); \\ 0, & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

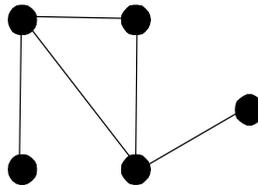


Figura 1: Grafo com seus vértices e arestas.

A *matriz de incidência* de G , $D(G)$, não é necessariamente quadrada. Trata-se

de uma matriz de ordem $n \times m$, tendo como entradas:

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } v_i \in e_j; \\ 0, & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

Segundo Biggs [4], a matriz de incidência de um grafo G tem como posto $n - \omega(G)$, onde $\omega(G)$ é o número de componentes conexas de G . Assim, $n - \omega(G)$ é o *posto* e $m - n + \omega(G)$, o *co-posto* de G . O posto de um grafo conexo de ordem n é $n - 1$. Um ciclo C_n tem posto e o co-posto iguais a $n - 1$ e um caminho P_n tem posto $n - 1$ e co-posto $n - 2$. O *laplaciano de um grafo* G é a matriz simétrica $Q(G) = \Delta - A$, tal que Δ é uma matriz diagonal, cujos elementos da diagonal principal são os graus dos vértices de G e A , a sua matriz de adjacência. O laplaciano do grafo representado na Figura 1 é a matriz

$$Q(G) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Dois grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ são isomorfos se, e somente se, existe uma bijeção f de V_1 a V_2 tal que $(v_1, v_2) \in E_1 \iff (f(v_1), f(v_2)) \in E_2$. Grafos isomorfos têm matrizes de adjacências semelhantes, ou seja, para $i = 1, 2$, se A_i é a matriz de adjacência de G_i , existe uma matriz de permutação P , tal que $A_1 = P^{-1}A_2P$.

3. O Polinômio Característico de um Grafo e seu Espectro

O estudo da Teoria Espectral dos Grafos basicamente se caracteriza pelo relacionamento entre as propriedades algébricas do espectro de certas matrizes associadas a um grafo e as propriedades topológicas desse grafo. A associação mais comum é feita pela matriz de adjacência e o espectro dessa matriz é o espectro do grafo. Se G é um grafo, seu polinômio característico, $p_G(\lambda)$, é o polinômio característico da matriz de adjacência de G , cujas raízes são os autovalores do grafo. O *espectro de* G é o conjunto dos autovalores, geralmente apresentados em ordem decrescente, não necessariamente no sentido estrito, associados às suas respectivas multiplicidades algébricas.

Uma das questões em aberto da Teoria de Grafos se refere à caracterização de uma lista completa de parâmetros capaz de decidir se dois grafos são isomorfos. Tais parâmetros são conhecidos como *invariantes* do grafo. Grafos isomorfos têm o mesmo espectro e, portanto, o espectro é um invariante do grafo. Por isso, em 1956, Günthhood e Primas conjecturaram que qualquer grafo poderia ser caracterizado pelo seu espectro mas, logo no ano seguinte, Harary e, simultaneamente, Collatz e Sinogonitz derrubaram esta tese, quando apresentaram alguns casos de árvores

não-isomorfas com 8 vértices tendo o mesmo espectro, [15]. Grafos não-isomorfos com o mesmo espectro são chamados *co-espectrais*. Pares de grafos co-espectrais são referidos por PINGs (*Pair of Isospectral Non-isomorphic Graphs*). Em 1971, Cvetković, exibiu o menor PING, constituído por pares de grafos com 5 vértices cada. Muitos outros PINGs aparecem na literatura: Em 1973, Schuvenk provou que *quase todas as árvores tem pares co-espectrais* e em 1976, Godsil e Mckay apresentaram uma tabela de estatísticas de PINGs com até 9 vértices. Lepović, em 1998, estendeu esta estatística para grafos com até 10 vértices e, finalmente, em 2003, Dam e Haemers [16] apresentaram uma estatística para PINGs com até 11 vértices, reproduzida na Tabela 1, mostrando que a percentagem atinge o máximo para PINGs com 10 vértices. Cvetković admite ser possível conjecturar que: *quase todos os grafos não têm correspondentes co-espectrais*, [15]. Os grafos da Figura 2 têm o mesmo espectro.

$$\begin{bmatrix} n & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ & 0.059 & 0.064 & 0.105 & 0.139 & 0.186 & 0.213 & 0.211 \end{bmatrix}$$

Tabela 1: Porcentagem de grafos co-espectrais com n vértices.

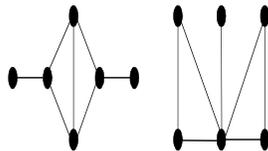


Figura 2: Um PING com 6 vértices.

Em *Recent results in the theory of graph spectra*, [8], há um capítulo dedicado à construção de grafos co-espectrais. Em geral, duas técnicas são utilizadas: uma, é uma espécie de *cut and paste*, onde uma aresta ou um vértice é retirado de um dado grafo e outra peça nele inserida, de modo que o espectro seja preservado no novo grafo, sendo este, não-isomorfo ao primeiro; a segunda, é o *método do produto*. O produto de dois grafos resulta num outro, cujo conjunto de vértices é a união dos conjuntos de vértices de cada grafo fator e o das arestas é a união dos respectivos conjuntos de arestas, acrescidas de outras $\{u, v\}$, com u num grafo fator e v no outro. Assim, substitue-se um dos grafos fator por outro, co-espectral a ele. Há várias classes de grafos caracterizadas pelo seu espectro, como os ciclos, os grafos completos e os bipartidos. Para este último caso, vale citar o seguinte resultado, que se encontra em [4], cuja prova utiliza o Teorema de Peron e Frobenius: *G é um grafo bipartido se, e somente se, para cada λ , autovalor de G , $-\lambda$ é autovalor de G , ambos, com as mesmas multiplicidades algébricas*, [18]. Um autoespaço associado a um autovalor de G é um *autoespaço de G* . Um autovetor de G pode ser visto de forma tal que a sua i -ésima coordenada seja a soma dos valores atribuídos aos adjacentes do i -ésimo vértice de G , [20]. Contudo, os autovetores não são invariantes do grafo e, por conta disso, parâmetros deles derivados, como o *ângulo do grafo*, são invariantes e podem ser utilizados na caracterização de classes de grafos isomorfos,

[12]. Um subgrafo é um grafo obtido de G ou por remoção de alguns de seus vértices ou de algumas de suas arestas ou de ambos. $G - x$ é um subgrafo de G , quando se remove o vértice x e todas as arestas nele incidentes. Um resultado muito utilizado como técnica de prova é o Teorema do Entrelaçamento: *Sejam $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ os autovalores de G e $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$ os autovalores de $G - x$. Então, $\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_{n-1} \geq \lambda_n$.* Propriedades do grafo podem ser deduzidas a partir dos coeficientes do seu polinômio característico. Por exemplo, a quantidade de subgrafos elementares de G com i vértices decorre do i -ésimo coeficiente desse polinômio. [4], [20] e [10]. O Teorema 3.1 relaciona o i -ésimo coeficiente de $p_G(\lambda)$ com os seus subgrafos elementares de ordem i , em função dos respectivos posto e co-posto.

Teorema 3.1 ([4]). *Seja $p_G(\lambda) = \det(\lambda I - A(G)) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$ o polinômio característico do grafo G . Considere E_i o conjunto de todos os subgrafos elementares de G com i vértices e H , um subgrafo elementar em E_i com posto $r(H)$ e co-posto $s(H)$. Então para todo $1 \leq i \leq n$,*

$$(-1)^i a_i = \sum_{H \in E_i} (-1)^{r(H)} 2^{s(H)}.$$

Daí, os coeficientes de $p_G(\lambda)$ são determinados em função da contagem dos seus subgrafos elementares. Este é um importante resultado, contudo à medida que n cresce, o cálculo dos coeficientes torna-se um problema combinatório difícil, pois requer a determinação de todos os subgrafos elementares de G . Do Teorema 3.1 e de resultados elementares da Álgebra Linear, prova-se que $a_1 = 0$, $a_2 = m$ e $a_3 = 2t$, onde t é o número de C_3 . Expressões para o quinto e o sexto coeficientes do polinômio característico foram determinadas por Moraes, Abreu e Jurkiewicz [25]. O próximo teorema apresenta a expressão de a_4 .

Teorema 3.2 ([25]). *Seja G um grafo com n vértices e m arestas, cuja seqüência de graus é $d = [d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n)]$. Se c_4 é o número de 4-ciclos em G , então*

$$a_4 = \frac{m^2 + m - 4c_4 - \sum_{i=1}^n [d(v_i)]^2}{2}.$$

Um grafo k -regular é aquele em que cada vértice tem grau k . Há um série de resultados espectrais referentes aos grafos regulares, dentre eles tem-se: *os grafos k -regulares e conexos têm k como autovalor, cuja multiplicidade algébrica vale 1.* Desse fato, decorre que se $G = K_n$, então G é constituído por um único autovalor igual a $n - 1$ e todos os demais iguais a -1 , [4].

4. O Polinômio Característico do Laplaciano de um Grafo e seu Espectro

Como no caso de $p_G(\lambda)$, os coeficientes do polinômio característico do laplaciano de G determinam propriedades do grafo. De acordo com o Teorema 4.3, seu i -ésimo

coeficiente está relacionado ao número de florestas geradoras de G com i arestas. O laplaciano de G , $Q(G)$, está associado à forma semidefinida positiva $q(x) = xQ(G)x^t$, $x \in \mathbb{R}^n$ e, por isso, seus autovalores são números reais não negativos, [24]. Estes, em ordem decrescente, não necessariamente no sentido estrito, associados às suas respectivas multiplicidades algébricas, constituem o *espectro do laplaciano de G* . Alguns resultados simples sobre o laplaciano de um grafo e seu espectro são apresentados, destacando-se o autovalor conhecido por conectividade algébrica, por informar sobre a conectividade de um grafo e, por isso, com aplicação em vulnerabilidade de redes.

Não é difícil provar que o posto de $Q(G)$ é $n - \omega(G)$, onde $\omega(G)$ é o número de componentes conexas de G , resultando em $\lambda_n = 0$, [1]. Merris [24] provou que G é conexo, se e somente se, $\lambda_{n-1} \neq 0$, quando λ_{n-1} é o penúltimo elemento do espectro de $Q(G)$. Tal autovalor é denominado *conectividade algébrica de G* , denotado por $a(G)$. Se G é desconexo, $a(G) = 0$. Espectros do laplaciano de alguns grafos especiais são conhecidos. Os grafos completos têm um autovalor nulo e todos os demais iguais a n . Logo, $a(K_n) = n$. Também, são conhecidos os espectros de $Q(G)$ para os ciclos, os caminhos e para outros grafos igualmente simples, [4]. Alguns outros resultados relacionam os autovalores de $Q(G)$ com os de G . Merris, em [24], apresenta inúmeros deles, dentre os quais merece destaque o seguinte: *Se G é conexo e k -regular, então λ é autovalor de G se e somente se $(k - \lambda)$ é autovalor de $Q(G)$* . O *Grafo complementar*, \overline{G} , de um grafo G é aquele com o mesmo conjunto de vértices de G tal que $\{u, v\} \in \overline{G}$ se, e somente se, $\{u, v\} \notin G$. O próximo resultado, devido a Merris, [24], é muito utilizado para provar teoremas: *Se o espectro de G é dado por $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 0\}$ então o espectro do laplaciano de \overline{G} é $\{n - \lambda_{n-1}, \dots, n - \lambda_1, 0\}$* . Seja o polinômio característico do laplaciano de G expresso por $p_{Q(G)}(\lambda) = \det(\lambda I - Q(G)) = \lambda^n + q_1\lambda^{n-1} + \dots + q_{n-1}\lambda + q_n$. Para todo i , $1 \leq i \leq n$, tome Θ_{if} como uma floresta geradora de G com i arestas e s_i , como o número delas, tal que para f , $1 \leq f \leq s_i$, $p(\Theta_{if})$ é o produto do número de vértices sobre cada árvore na floresta Θ_{if} . O Teorema 4.3 relaciona os coeficientes de $p_{Q(G)}(\lambda)$ com as florestas geradoras de G .

Teorema 4.1 ([4]). *Os coeficientes do polinômio de $Q(G)$ são dados por*

$$(-1)^i q_i = \sum_{f=1}^{s_i} p(\Theta_{if}), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Alguns poucos coeficientes de $p_{Q(G)}(\lambda)$ são expressos através formas algébricas mais simples. Por exemplo, se $S(G)$ é o número de árvores de G , $q_1 = -2m$, $q_{n-1} = (-1)^{n-1} nS(G)$ e $q_n = 0$. Uma expressão para q_2 , o terceiro desses coeficientes, foi determinada em função da seqüência de graus dos vértices do grafo por Oliveira et al. [27].

5. Perspectivas Futuras

Como já dito, TEG teve início com aplicações em Química Quântica com pesquisadores como Günthard e Primas, continuando com Cvetković, Gutman, Graovac,

Trinajstić. Hoje em dia, outros se destacam nesta área, como Haemers, Fowler e Stevanovic que estudam os *fullerenes*, grafos 3- regulares e planares, cujas faces são C_5 ou C_6 . Fullerenes aparecem em Química como moléculas que consistem totalmente de átomos de carbono, [20], [14] e [15]. Questões em aberto envolvendo autovalores de grafos aparecem em larga escala, dentre elas, destaca-se a proposta dada por Harary e Schwenk em 1973: *Quais são os grafos com espectros constituídos somente por autovalores inteiros?* Segundo Dam e Haemers, para quase todos os grafos a resposta a esta pergunta, ainda, é desconhecida; os grafos conhecidos estão no *survey* desses autores, [16]. *Grafos linha*, $L(G)$, são obtidos de G , quando cada aresta de G corresponde a um vértice em $L(G)$ e, reciprocamente, de tal forma que, vértices são adjacentes em $L(G)$, se e somente se, são arestas incidentes em G . Tais grafos tem autovalores ≥ -2 e o livro *Spectral Generalizations of Line Graphs*, dos autores Cvetković, Rowlinson e Simic [13], apresenta o estado da arte, com várias questões em aberto. Por exemplo: Quais são os *grafos excepcionais*, isto é, aqueles com autovalores ≥ -2 que não são grafos linha? [15] e [13]. Uma outra questão interessante envolve a caracterização de grafos com autovalores inteiros e aparece em [3]. O estudo de autoespaços de grafos é uma área em desenvolvimento, com diversos parâmetros úteis na caracterização de algumas classes de isomorfismos, [12]. No Brasil, desde 1996, há um grupo estudando TEG com ênfase, tanto na determinação de expressões para os coeficientes dos polinômios característico de um grafo e de seu laplaciano, como no estudo da conectividade algébrica e de outros invariantes espectrais, com o objetivo é compará-los a outros clássicos da Teoria dos Grafos na tentativa de utilizá-los como medida de vulnerabilidade de redes, [25], [27], [2] e [23].

Abstract: From a brief historic of the Theory of Graph Spectra, TGE, this paper gives basic concepts about this theory and shows that it is possible to determine properties of a graph from simple results of Linear Algebra. This is accomplished, through the relationship between the structure of a graph and the spectra of adjacency and Laplacian matrices. Moreover, it relates the TGE with Engineering, Computer Science and others areas of Mathematics. Finally, it presents some open problems and possible development of this field.

Keywords: characteristic polynomial of a graph, eigenvalues of a graph and Laplacian of graphs.

Referências

- [1] N.M.M. Abreu e C.S. Oliveira, “Álgebra Linear em Teoria dos Grafos”, minicurso, Primeira Semana da Matemática de São Mateus, ERMAC/SBMAC, UFES, 2004.
- [2] S. Belhaiza, N.M.M. Abreu, P. Hansen e C.S. Oliveira, Variable Neighborhood Search for Extremal Graphs 11. Bounds on Algebraic Connectivity, apresentado em Computer and Discovery, Montreal, Canadá, submetido à série DIMACS, 2004.
- [3] K. Balińska, D. Cvetković, Z. Radosavljević, S. Simić e D. Stevanović, A survey on integral graphs, *Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat.*, Univ. Belgrad, **13** (2002), 42-65.
- [4] N. Biggs, “Algebraic Graph Theory”, 2a. ed., Cambridge, Inglaterra, 1993.
- [5] L. Brankovic e D. Cvetković, The eigenspace of the eigenvalue -2 in generalized line graphs and a problem in security of statistical data bases, *Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat.*, Univ. Belgrad, **14**, (2003).
- [6] P.O. Boaventura Netto, “Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos”, 2a. ed., Editora Blücher, São Paulo, 2001.
- [7] D. Cvetković, M. Cangalovic e V. Kovacevic-Vujcic, Combinatorial optimization and highly informative graph invariants, to appear.
- [8] D. Cvetković, M. Doob, I. Gutman e A. Torgašev, “Recent Results in the Theory of Graph Spectra”, North-Holland, 1988.
- [9] D. Cvetković, M. Doob e H. Sachs, “Spectra of Graphs: Theory and application”, Academic Press, New York, 1979.
- [10] D. Cvetković, M. Doob e H. Sachs, “Spectra of Graphs”, 3a. ed., Academic Press, New York, 1995.
- [11] D. Cvetković, P. Hansen e V. Kovacevic-Vujcic, On some interconnections between combinatorial optimization and extremal graph theory, to appear.
- [12] D. Cvetkovic, P. Rowlinson e S. Simic, “Eigenspaces of Graphs”, in: Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge, vol. 66, 1997.
- [13] D. Cvetković, P. Rowlinson e S. Simic, “Spectral Generalizations of line graphs: On graphs with least eigenvalues-2”, Cambridge University Press, 2004.
- [14] D. Cvetković e D. Stevanovic, Spectral moments of fullerene graphs, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, **50** (2004), 62-72.
- [15] D. Cvetković, The Theory of Graph Spectra: Origins and Development, palestra apresentada em *Algebraic Graph Theory Journey*, ERMAC-Rio, SBMAC, (2004).

- [16] E.R. Dam e W.H. Haemers, Which graphs are determined by their spectrum, *Linear Algebra and its Applications*, **373** (2003) 241-272.
- [17] R. Diestel, “Graph Theory”, Springer-Verlag, 1997.
- [18] F.R. Gantmacher, “The Theory of Matrices”, Chelsea Publishing Company, New York, 1997.
- [19] A. Graovac, I. Gutman e N. Trinajstić, Graph theory and molecular orbitals, *Theoret. Chim. Acta*, **26** (1972), 67-78.
- [20] C. Godsil e G. Royle, “Algebraic Graph Theory”, Graduate texts in Mathematics, GTM 207, Springer, 2001.
- [21] F. Harary, “Graph Theory”, Addison-Wesley, 1969.
- [22] K. Hoffman e R. Kunze, “Linear Algebra”, Prentice-Hall Inc., 1961.
- [23] L. Lima, N.M.M. Abreu, P.E. Moraes e C. Sertã, Some properties of graphs in (a,b) -linear classes, submetido à *Congressus Numerantium*, 2004.
- [24] R. Merris, Laplacian Matrices of Graphs: A Survey, *Linear Algebra and its Applications*, **197/198** (1994), 143-176.
- [25] P.E. Moraes, N.M.M. Abreu e S. Jurkiewicz, The fifth and sixth coefficients of characteristic polynomial of a graph, *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, **11**, (2002).
- [26] G. Michaels e K.H. Rosen, “Applications of Discrete Mathematics”, Mc Graw-Hill, 1992.
- [27] C.S. Oliveira, N.M.M. Abreu e S. Jurkiewicz, The characteristic polynomial of the Laplacian graphs in (a,b) -linear classes, *Linear Algebra and its Applications*, **356** (2002), 113-121.
- [28] J.L. Szwarcfiter, “Grafos e Algoritmos Computacionais”, Ed. Campus, 1984.
- [29] N. Trinajstić, “Chemical Graph Theory”, I and II, CRC Press, Boca Raton, Flórida, 1983.
- [30] D.B. West, “Introduction to Graph Theory”, Prentice-Hall, 1996.