

Geometria Diferencial de Curvas de Interseção de Duas Superfícies Implícitas

O. ALÉSSIO¹, Departamento de Pós-Graduação, Mestrado em Matemática e Estatística, UNINCOR- Universidade Vale do Rio Verde de Três Corações, Av. Castelo Branco, 82, CEP: 37.410-000, Três Corações, MG, Brasil.

Resumo. Apresenta-se uma técnica para encontrar as propriedades geométricas da curva de interseção de duas superfícies implícitas, usando o teorema da função implícita.

1. Introdução

A principal motivação deste artigo é o problema de interseção de duas superfícies. Do ponto de vista histórico o problema de interseção de superfícies (SSI) vem de muitos séculos atrás. As clássicas curvas conhecidas como cônicas (elipse, hipérbole, parábola) são obtidas através da interseção entre duas superfícies: um plano e um cone. Muitos problemas podem ser reduzidos em interseção de superfícies, como por exemplo determinar: a equação paramétrica de curvas dadas implicitamente por duas superfícies, o conjunto de nível de uma função vetorial, máximos e mínimos via Multiplicadores de Lagrange com duas restrições, limites de integração de integrais triplas, soluções de sistemas não-lineares, formas complexas via modelagem geométrica. Para a interseção de superfícies em geral, não se consegue obter a equação paramétrica da curva de interseção, o que se faz é obter pontos ao longo da curva de interseção e para isso o método mais utilizado é o de caminhada [1]. O método de caminhada consiste em partir de um ponto inicial na curva de interseção e determinar iterativamente o próximo ponto até traçar a curva completamente. Propriedades geométricas locais da curva de interseção são aplicadas para adaptativamente determinar os passos da caminhada [1, 3].

O problema de interseção de superfícies pode ser dos tipos: paramétrica-paramétrica, implícita-implícita e paramétrica-implícita. Para calcular a curva de interseção com precisão e eficiência, aproximações de ordem superior são necessárias, isto é, precisa-se obter as propriedades geométricas locais da curva de interseção. Enquanto geometria diferencial de curvas paramétricas pode ser encontrada em livros clássicos (Struik, 1950; Willmore, 1959; do Carmo, 1976), há pouca literatura de geometria diferencial de curvas de interseção. Willmore em seu livro [2], descreve como obter o vetor tangente, vetor normal e o vetor binormal da curva de interseção de duas superfícies implícitas usando o operador denotado por Δ . Recentemente,

¹osmaraleccio@yahoo.com.br

Ye e Maekawa [4], forneceram as propriedades geométricas da curva de interseção para os três tipos, usando o vetor α'' como combinação linear dos vetores normais e α''' como combinação do vetor tangente e os vetores normais. Diferentemente dos trabalhos anteriores, pretende-se fornecer as propriedades geométricas da curva de interseção de duas superfícies implícitas, usando o teorema da função implícita. Neste trabalho, o cálculo das propriedades geométricas resume-se a resolver sistemas lineares de 2 equações e 2 variáveis, independente da ordem da derivada, isto é, se quiséssemos calcular a derivada de ordem 5, teríamos que resolver um sistema linear de 2 equações e 2 variáveis, enquanto que o método de Willmore elevaria a complexidade a cada aplicação do operador Δ e o método de Ye e Maekawa teria complexos coeficientes das combinações lineares dos vetores envolvidos.

2. Geometria Diferencial de Curvas

Curvas Parametrizadas pelo comprimento de arco

Seja $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$, ou em forma de vetor $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$, a curva parametrizada pelo comprimento de arco s . Então temos $\alpha'(s) = \mathbf{t}$ e $\alpha''(s) = \mathbf{k} = k\mathbf{n}$, onde \mathbf{t} é o vetor tangente unitário e \mathbf{k} o vetor curvatura. Temos que a curvatura é dada por $k = \sqrt{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}} = \sqrt{\alpha'' \cdot \alpha''}$. A terceira derivada $\alpha'''(s)$ é obtida por diferenciar $\alpha''(s)$ em relação a s , isto é, $\alpha'''(s) = k'\mathbf{n} + k\mathbf{n}'$, onde pode-se trocar \mathbf{n}' pela segunda equação do **Triedro de Frenet**, produzindo $\alpha'''(s) = -k^2\mathbf{t} + k'\mathbf{n} + k\tau\mathbf{b}$. Como os vetores \mathbf{t} , \mathbf{n} e \mathbf{b} formam a base ortonormal com a orientação da mão-direita, a torção pode ser obtida por $\tau = \frac{\mathbf{b} \cdot \alpha'''(s)}{k}$.

3. Superfícies Implícitas e Curvas Implícitas

Definição 3.1 (Superfície Implícita). *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação diferenciável no aberto D . Dado $k \in \mathbb{R}$, lembramos que o conjunto de nível k de f é o conjunto definido por $f^{-1}(k) = \{(x, y, z) \in D; f(x, y, z) = k\}$, isto é, $f^{-1}(k)$ é o conjunto solução em D da equação $f(x, y, z) = k$. Formalmente:*

$$S = f^{-1}(0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\}.$$

Teorema 3.1 (Teor. da Função Implícita). *Sejam $A \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ um aberto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k , $k \geq 1$, $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Então existem abertos $U \subset \mathbb{R}^2$, $V \subset \mathbb{R}$ com $(x_0, y_0, z_0) \in U \times V \subset A \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, tais que, para todo $(x, y) \in U$, existe um único $z = z(x, y) \in V$ tal que $f(x, y, z(x, y)) = 0$ e $z = z(x, y) \in C^k$.*

Teorema 3.2. *Sejam $f, g : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^k , $k \geq 1$, no aberto A , $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in A$, e $f(p_0) = c_1$ e $g(p_0) = c_2$. Se $\frac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)}(p_0) \neq 0$ então existem abertos U e V tais que $(x_0, y_0, z_0) \in U \times V \subset A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ e tais que, para todo $x \in U$, existe um único $(y, z) = (y(x), z(x)) \in V$ tal que $\begin{cases} f_1(x, y(x), z(x)) = c_1 \\ f_2(x, y(x), z(x)) = c_2 \end{cases}$.*

3.1. Representação Implícita das Curvas

A representação implícita de uma curva espacial pode ser expressa como uma curva de interseção entre superfícies implícitas $f = 0 \cap g = 0$. De fato, é conhecido pelo teorema da função implícita que as equações $f = 0$ e $g = 0$, podem ser resolvidas para duas das variáveis em função da terceira. Por exemplo, se $\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}(P_0) \neq 0$, para alguma vizinhança de x_0 podemos resolver $f = 0 \cap g = 0$ para y e z como função de x , obtendo uma representação da seguinte forma $x = x, y = y(x), z = z(x)$ com x sendo o parâmetro. Isto define localmente uma curva paramétrica $\alpha(x) = (x, y(x), z(x))$, que é solução de $f = 0 \cap g = 0$.

Sejam $f(x, y, z) = 0$ e $g(x, y, z) = 0$ superfícies implícitas. Vamos assumir que estas superfícies são todas regulares. Em outras palavras $\nabla f \neq 0, \nabla g \neq 0$. O vetor normal unitário da superfície implícita f é dado por $N^f = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$.

4. Trabalhos Existentes

Com base nas propriedades geométricas das duas superfícies regulares, $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$ que se intersectam, foram propostas técnicas para estimar ou determinar exatamente as propriedades locais da curva de interseção. As propriedades geométricas serão calculadas somente nos pontos cuja a interseção das superfícies seja transversal, isto é, os vetores normais de ambas as superfícies não são paralelos. Para o caso tangencial veja **Ye e Maekawa** [4].

Para ilustrar melhor os resultados que virão a seguir, veja a Figura 1

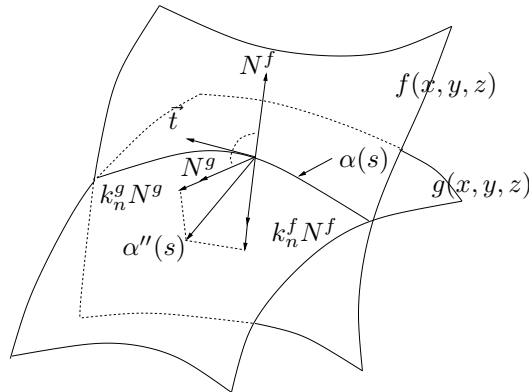


Figura 1: Interseção Transversal

4.1. Vetor Tangente

Barnhill e Kersey [1], quando se trata de uma interseção transversal, a forma mais usual para obter o vetor tangente em cada ponto P é dada pelo produto vetorial dos vetores normais de ambas superfícies:

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{N}^f(u, v) \times \mathbf{N}^g(p, q)}{\|\mathbf{N}^f(u, v) \times \mathbf{N}^g(p, q)\|}. \quad (4.1)$$

4.2. Vetor Curvatura e Curvatura

Ye e Maekawa [4] obtiveram expressões para a curvatura tanto nos pontos regulares quanto nos pontos singulares.

Para interseções transversais, o vetor curvatura da curva interseção no ponto P é perpendicular ao vetor tangente, logo ele está no plano formado pelos vetores normais das duas superfícies. Assim, ele pode ser expresso como uma combinação linear dos dois vetores:

$$\alpha''(s) = \alpha \mathbf{N}^f + \beta \mathbf{N}^g, \quad (4.2)$$

onde α e β são as incógnitas. A curvatura normal em P na direção t é a projeção do vetor $\alpha''(s)$ sobre o vetor normal unitário N da superfície em P dado por

$$k_n = \alpha''(s) \cdot \mathbf{N} = \kappa \mathbf{n} \cdot \mathbf{N}. \quad (4.3)$$

Com isso, temos

$$\begin{aligned} k_n^f &= \alpha + \beta \cos(\theta) \\ k_n^g &= \alpha \cos(\theta) + \beta, \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde θ é o ângulo entre os vetores normais \mathbf{N}^f e \mathbf{N}^g .

Solucionando os coeficientes α e β pelo sistema Eq.(4.4), e substituindo-os na Eq.(4.2), temos

$$\alpha'' = \frac{k_n^f - k_n^g \cos \theta}{\sin^2 \theta} \mathbf{N}^f + \frac{k_n^g - k_n^f \cos \theta}{\sin^2 \theta} \mathbf{N}^g, \quad (4.5)$$

onde $\cos \theta = \mathbf{N}^f \cdot \mathbf{N}^g$.

A curvatura normal k_n para a superfície implícita é obtida por usar $\frac{d^2 f}{ds^2}$. A projeção do vetor $\frac{d^2 f}{ds^2}$ sobre o vetor normal $N = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ da superfície, é dado por:

$$k_n^f = -\frac{f_{xx}(x')^2 + f_{yy}(y')^2 + f_{zz}(z')^2 + 2(f_{xy}x'y' + f_{yz}y'z' + f_{xz}x'z')}{\sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + (f_z)^2}}, \quad (4.6)$$

onde x', y' e z' são as coordenadas do vetor tangente $t = \alpha'(s)$ dado pela Eq.(4.1).

A expressão da curvatura é dada exatamente por

$$\kappa = \frac{1}{|\sin \theta|} \sqrt{(k_n^f)^2 + (k_n^g)^2 - 2k_n^f k_n^g \cos \theta} \quad \text{ou} \quad \kappa = \|\alpha''(s)\|.$$

Willmore [2] descreve como obter a curvatura da curva de interseção para duas superfícies implícitas, considerando a curva de interseção representada pela equação $\alpha = \alpha(s)$, e sejam duas superfícies implícitas dadas por $f(\alpha(s)) = 0$ e $g(\alpha(s)) = 0$.

Como vetor tangente unitário da curva de interseção é ortogonal aos vetores normais de ambas as superfícies. Assim, se $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$, segue que $t = \alpha'(s)$ é paralelo a

$$\nabla f \times \nabla g = h. \quad (4.7)$$

Diz-se que $\lambda\alpha' = \nabla f \times \nabla g$. Então $\lambda x' = h_1$, $\lambda y' = h_2$, $\lambda z' = h_3$ e

$$\lambda \frac{d}{ds} = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} + h_3 \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (4.8)$$

É conveniente denotar o operador (4.8) por Δ . Portanto

$$\Delta\alpha = \mathbf{h}. \quad (4.9)$$

Da definição de λ e h segue que

$$\lambda\mathbf{t} = \mathbf{h}, \quad (4.10)$$

e assim

$$\lambda^2 = \mathbf{h}^2. \quad (4.11)$$

Operando em (4.10) com Δ tem-se

$$\lambda^2 k\mathbf{n} + \lambda\lambda'\mathbf{t} = \Delta\mathbf{h}. \quad (4.12)$$

Aplicando o produto vetorial de (4.9) e (4.12) temos:

$$\lambda^3 k\mathbf{b} = \mathbf{h} \times \Delta\mathbf{h} = \mathbf{k}, \quad (4.13)$$

logo a curvatura da curva é

$$k = \frac{\|\mathbf{k}\|}{\lambda^3}. \quad (4.14)$$

O vetor curvatura $\alpha''(s)$ é dado por

$$\alpha''(s) = \frac{\mathbf{k}}{\lambda^3} \times \mathbf{t} = k\mathbf{b} \times \mathbf{t}. \quad (4.15)$$

4.3. Torção

Ye e Maekawa [4] obtiveram também expressões da torção para interseções transversais.

Como \mathbf{N}^f e \mathbf{N}^g estão no plano normal (plano gerado por \mathbf{n} e \mathbf{b}), os termos $k'\mathbf{n} + k\tau\mathbf{b}$ de $\alpha'''(s) = -k^2\mathbf{t} + k'\mathbf{n} + k\tau\mathbf{b}$ pode ser trocado pela combinação linear $\gamma\mathbf{N}^f + \delta\mathbf{N}^g$. Assim temos

$$\alpha'''(s) = -\kappa^2\mathbf{t} + \gamma\mathbf{N}^f + \delta\mathbf{N}^g. \quad (4.16)$$

Agora, se projetarmos $\alpha'''(s)$ sobre os vetores normais unitários N^f e N^g em P e denotarmos por λ_n^f e λ_n^g , respectivamente, temos

$$\begin{aligned} \lambda_n^f &= \gamma + \delta \cos(\theta) \\ \lambda_n^g &= \gamma \cos(\theta) + \delta. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Resolvendo o sistema linear (4.17) para os escalares γ , δ e substituindo em (4.16) tem-se

$$\alpha''' = -\kappa^2\mathbf{t} + \frac{\lambda_n^f - \lambda_n^g \cos \theta}{\sin^2 \theta} \mathbf{N}^f + \frac{\lambda_n^g - \lambda_n^f \cos \theta}{\sin^2 \theta} \mathbf{N}^g. \quad (4.18)$$

Os parâmetros λ_n^f e λ_n^g para ambas as superfícies implícitas são obtidos usando $\frac{d^3 f}{ds^3}$. A projeção do $\frac{d^3 f}{ds^3}$ sobre o vetor normal $N = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ da superfície, é dado por:

$$\lambda_n = \frac{f_x x''' + f_y y''' + f_z z'''}{\sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + (f_z)^2}} = -\frac{F_1 + F_2 + F_3}{\sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + (f_z)^2}}, \quad (4.19)$$

onde

$$\begin{aligned} F_1 &= f_{xxx} (x')^3 + f_{yyy} (y')^3 + f_{zzz} (z')^3, \\ F_2 &= 3[f_{xxy} (x')^2 y' + f_{xxz} (x')^2 z' + f_{xyy} x' (y')^2 + f_{yyz} (y')^2 z' + f_{xzz} x' (z')^2 + \\ &\quad f_{yzz} y' (z')^2 + f_{xyz} x' y' z'], \\ F_3 &= 3[f_{xx} x' x'' + f_{yy} y' y'' + f_{zz} z' z'' + f_{xy} (x'' y' + x' y'') + f_{yz} (y'' z' + y' z'') + \\ &\quad f_{xz} (x'' z' + x' z'')], \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde x', y' e z' são dados pela Eq.(4.1) e x'', y'' e z'' são dados pela Eq.(4.5).

Finalmente, a torção pode ser obtida de $\alpha'''(s) = -k^2 \mathbf{t} + k' \mathbf{n} + k\tau \mathbf{b}$ por

$$\tau = \frac{\mathbf{b} \cdot \alpha'''}{k},$$

onde κ é a curvatura e o vetor binormal pela expressão $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$.

Willmore [2] descreve como obter a torção da curva de interseção para duas superfícies implícitas.

Aplicando o operador Δ na Eq.(4.13) temos

$$\lambda (\lambda^3 k)' \mathbf{b} - \lambda^4 k \tau \mathbf{n} = \Delta \mathbf{k}. \quad (4.21)$$

Fazendo o produto escalar de (4.12) e de (4.21) temos

$$-\lambda^6 k^2 \tau = \Delta \mathbf{h} \cdot \Delta \mathbf{k}, \quad (4.22)$$

logo a torção é

$$\tau = -\frac{\Delta \mathbf{h} \cdot \Delta \mathbf{k}}{\lambda^6 k^2}. \quad (4.23)$$

5. Método usando o Teorema da Função Implícita

5.1. Vetor Tangente

Sem perda de generalidade, podemos assumir que a matriz jacobiana $\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}(P_0) \neq 0$, então temos localmente uma curva paramétrica $\alpha(x) = (x, y(x), z(x))$. Portanto temos que o ponto da curva $P_0 = \alpha(x_0)$ satisfaz as duas relações da forma

$$\begin{cases} f(x_0, y(x_0), z(x_0)) = 0 \\ g(x_0, y(x_0), z(x_0)) = 0 \end{cases}. \quad (5.1)$$

Derivando as equações em relação a x , temos

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial g}{\partial z} \dot{z} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} = -\frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial g}{\partial z} \dot{z} = -\frac{\partial g}{\partial x} \end{cases}, \quad (5.2)$$

onde $\dot{y} = \frac{dy}{dx}$ e $\dot{z} = \frac{dz}{dx}$. O vetor tangente da curva $\alpha(x)$ no ponto $\alpha(x_0) = P_0$ é dado por $\dot{\alpha}(x_0) = (1, \dot{y}(x_0), \dot{z}(x_0))$. Para obter este vetor tangente, devemos resolver o sistema (5.2).

5.2. Vetor Curvatura e Curvatura

Derivando as equações dadas no sistema (5.2) em relação a x , temos

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} \ddot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \ddot{z} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} \dot{y} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial z} \dot{z} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \dot{y} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \dot{z} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \dot{y} \dot{z} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \ddot{y} + \frac{\partial g}{\partial z} \ddot{z} = -\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial x} - \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial y} \dot{y} - \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial z} \dot{z} - 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \dot{y} - 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z} \dot{z} - 2 \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} \dot{y} \dot{z} \end{cases} \quad (5.3)$$

onde $\ddot{y} = \frac{d^2 y}{dx^2}$ e $\ddot{z} = \frac{d^2 z}{dx^2}$. O vetor derivada segunda da curva $\alpha(x)$ no ponto $\alpha(x_0) = P_0$ é dado por $\ddot{\alpha}(x_0) = (0, \ddot{y}(x_0), \ddot{z}(x_0))$. A curvatura da curva no ponto $\alpha(x_0) = P_0$ é $\kappa(x_0) = \frac{\|\dot{\alpha}(x_0) \times \ddot{\alpha}(x_0)\|}{\|\dot{\alpha}(x_0)\|^3}$. O vetor curvatura é $\alpha''(x_0) = \kappa \mathbf{n}(x_0)$, onde $\mathbf{n}(x_0) = \mathbf{b}(x_0) \times \mathbf{t}(x_0)$ e $\mathbf{b}(x_0) = \frac{\dot{\alpha}(x_0) \times \ddot{\alpha}(x_0)}{\|\dot{\alpha}(x_0) \times \ddot{\alpha}(x_0)\|}$.

5.3. Torção

Derivando as equações dadas no sistema (5.3) em relação a x , temos

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} \dddot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \dddot{z} = -\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial x} - \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial y \partial y} (\dot{y})^3 - \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial z \partial z} (\dot{z})^3 - 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial y} \dot{y} - 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial z} \dot{z} \\ \quad - 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial y} (\dot{y})^2 - 3 \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial y \partial z} (\dot{y})^2 \dot{z} - 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z \partial z} (\dot{z})^2 - 3 \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial z} \dot{y} (\dot{z})^2 \\ \quad - 6 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} \dot{y} \dot{z} - 3 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} \dot{y} \ddot{y} - 3 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial z} \dot{z} \ddot{z} - 3 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \ddot{y} - 3 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} (\ddot{y} \dot{z} + \dot{y} \ddot{z}) \\ \quad - 3 \frac{\partial f}{\partial x \partial z} \ddot{z} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \dddot{y} + \frac{\partial g}{\partial z} \dddot{z} = -\frac{\partial^3 g}{\partial x \partial x \partial x} - \frac{\partial^3 g}{\partial y \partial y \partial y} (\dot{y})^3 - \frac{\partial^3 g}{\partial z \partial z \partial z} (\dot{z})^3 - 3 \frac{\partial^3 g}{\partial x \partial x \partial y} \dot{y} - 3 \frac{\partial^3 g}{\partial x \partial x \partial z} \dot{z} \\ \quad - 3 \frac{\partial^3 g}{\partial x \partial y \partial y} (\dot{y})^2 - 3 \frac{\partial^3 g}{\partial y \partial y \partial z} (\dot{y})^2 \dot{z} - 3 \frac{\partial^3 g}{\partial x \partial z \partial z} (\dot{z})^2 - 3 \frac{\partial^3 g}{\partial y \partial z \partial z} \dot{y} (\dot{z})^2 \\ \quad - 6 \frac{\partial^3 g}{\partial x \partial y \partial z} \dot{y} \dot{z} - 3 \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial y} \dot{y} \ddot{y} - 3 \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial z} \dot{z} \ddot{z} - 3 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \ddot{y} - 3 \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} (\ddot{y} \dot{z} + \dot{y} \ddot{z}) \\ \quad - 3 \frac{\partial g}{\partial x \partial z} \ddot{z} \end{cases} \quad (5.4)$$

onde $\dddot{y} = \frac{d^3 y}{dx^3}$ e $\dddot{z} = \frac{d^3 z}{dx^3}$. O vetor $\ddot{\alpha}(x)$ no ponto $\alpha(x_0) = P_0$ é dado por $\ddot{\alpha}(x_0) = (0, \ddot{y}(x_0), \ddot{z}(x_0))$. A torção da curva no ponto $\alpha(x_0) = P_0$ é

$$\tau(x_0) = \frac{(\dot{\alpha}(x_0) \times \ddot{\alpha}(x_0)) \cdot \ddot{\alpha}(x_0)}{\|\dot{\alpha}(x_0) \times \ddot{\alpha}(x_0)\|^2}.$$

6. Exemplo

Será calculado o vetor tangente, vetor curvatura, curvatura e a torção no ponto $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ da curva de interseção da esfera de raio 1 com o cilindro deslocado em

$\frac{1}{2}$ no eixo x e raio $\frac{1}{2}$, cujas equações implícitas são dadas respectivamente por:

$$\begin{cases} f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ g(x, y, z) = x^2 + y^2 - x = 0 \end{cases} . \quad (6.1)$$

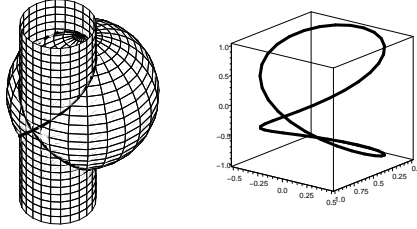


Figura 2: Esfera X Cilindro e a Curva de Interseção

6.1. Método Ye e Maekawa

Por **Barnhill e Kersey** [1] o vetor tangente é dado por $\mathbf{t} = \frac{N^f(u, v) \times N^g(p, q)}{|N^f(u, v) \times N^g(p, q)|}$.

No ponto $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ temos $\mathbf{N}^f = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $\mathbf{N}^g = (0, 1, 0)$. Portanto o vetor **tangente** é $\mathbf{t}(s_0) = (-\frac{\sqrt{6}}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{3})$. O vetor curvatura é dado pela Eq.(4.5)

$\alpha''(s) = \frac{k_n^f - k_n^g \cos \theta}{\sin^2 \theta} \mathbf{N}^f + \frac{k_n^g - k_n^f \cos \theta}{\sin^2 \theta} \mathbf{N}^g$, e a expressão da curvatura é dada exatamente por $\kappa = \frac{1}{|\sin \theta|} \sqrt{(k_n^f)^2 + (k_n^g)^2 - 2k_n^f k_n^g \cos \theta}$.

Agora precisamos calcular as duas curvaturas normais k_n^f e k_n^g e os ângulos $\cos \theta$ e $\sin \theta$ em P . Para calcular k_n^f e k_n^g usamos a Eq.(4.6). No ponto $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ temos: $k_n^f = -1$, $k_n^g = -\frac{4}{3}$, $\cos \theta = \frac{1}{2}$ e $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Portanto o **vetor curvatura** é $\alpha''(s_0) = (-\frac{2}{9}, -\frac{4}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{9})$ e a **curvatura** é $\kappa = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{13}{3}}$.

O vetor α''' é dado pela Eq.(4.18) $\alpha''' = -\kappa^2 \mathbf{t} + \frac{\lambda_n^f - \lambda_n^g \cos \theta}{\sin^2 \theta} \mathbf{N}^f + \frac{\lambda_n^g - \lambda_n^f \cos \theta}{\sin^2 \theta} \mathbf{N}^g$ e a expressão da torção é dada por $\tau = \frac{\mathbf{b} \cdot \alpha'''}{k}$. Os parâmetros λ_n^f e λ_n^g são dados pela Eq.(4.19). No ponto $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ temos: $\lambda_n^f = 0$, $\lambda_n^g = \frac{4\sqrt{6}}{9}$.

Portanto $\alpha'''(s_0) = (\frac{40\sqrt{6}}{81}, \frac{4\sqrt{6}}{9}, -\frac{76\sqrt{3}}{81})$. Para calcular a torção precisamos encontrar o vetor binormal \mathbf{b} , mas antes devemos encontrar o vetor \mathbf{n} , isto é, $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{k} = (-\frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{13}}, -2 \sqrt{\frac{3}{13}}, -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{6}{13}})$ e $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} = (\frac{2\sqrt{13}}{13}, -\frac{\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{26}}{13})$. Então a **torção** é $\tau = \frac{\mathbf{b} \cdot \alpha'''}{k} = \frac{6\sqrt{2}}{13}$.

6.2. Método Willmore

Agora o vetor tangente unitário é calculado usando as Eqs.(4.7),(4.10) e (4.11).

A Eq.(4.7) é dada por $h = \nabla f \times \nabla g = (-4yz, 4xz - 2z, 2y)$, pois $\nabla f = (2x, 2y, 2z)$ e $\nabla g = (2x - 1, 2y, 0)$. No ponto $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, temos $\nabla f = (1, 1, \sqrt{2})$ e $\nabla g = (0, 1, 0)$. Portanto $h(P_0) = (-\sqrt{2}, 0, 1)$. Da Eq.(4.10) temos $\lambda t = (-\sqrt{2}, 0, 1)$, consequentemente $\lambda x' = -\sqrt{2}, \lambda y' = 0, \lambda z' = 1$. Da Eq.(4.11) tem-se $\lambda^2 = h^2 = 3 \implies \lambda = \pm\sqrt{3}$. Obtendo o **vetor tangente** $\mathbf{t} = \pm \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Escolhendo $\mathbf{t} = \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \implies \lambda = \sqrt{3}$. Usando o operador Δ em h temos: $\Delta h = ((h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} + h_3 \frac{\partial}{\partial z})(-4yz), (h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} + h_3 \frac{\partial}{\partial z})(4xz - 2z), (h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} + h_3 \frac{\partial}{\partial z})(2y)) = (-4zh_2 - 4yh_3, 4zh_1 + (4x - 2)h_3, 2h_2)$, como $\lambda x' = h_1, \lambda y' = h_2, \lambda z' = h_3$, tem-se $\Delta h = \lambda(-4y'z - 4yz', 4x'z + 4xz' - 2z', 2y')$. Usando as coordenadas do ponto $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e do vetor tangente, $\Delta \mathbf{h}(P_0) = (-2, -4, 0)$. Aplicando o produto vetorial de $\mathbf{h}(P_0)$ e $\Delta \mathbf{h}(P_0)$ temos: $\mathbf{k} = \mathbf{h}(P_0) \times \Delta \mathbf{h}(P_0) = (4, -2, 4\sqrt{2})$, então a **curvatura** da curva é $k = \frac{\|\mathbf{k}\|}{\lambda^3} = \frac{2\sqrt{13}}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{13}{3}}$. O **vetor curvatura** $\alpha''(s)$ é dado pela Eq.(4.15) $\alpha''(s) = \left(-\frac{2}{9}, -\frac{4}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{9}\right)$.

Fazendo o produto vetorial de \mathbf{h} por $\Delta \mathbf{h}$ temos $\mathbf{k} = \mathbf{h} \times \Delta \mathbf{h} = (-4yz, 4xz - 2z, 2y) \times \lambda(-4y'z - 4yz', 4x'z + 4xz' - 2z', 2y')$

Usando o operador Δ em \mathbf{k} temos: $\Delta \mathbf{k} = \mathbf{h} \times \Delta^2 \mathbf{h} = (-4yz, 4xz - 2z, 2y) \times 4\lambda^2(-y''z - 2y'z' - yz'', x''z + 2x'z' + xz'' - \frac{1}{2}z'', \frac{1}{2}y'')$

Substituindo as coordenadas do ponto $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, do vetor tangente, e do vetor curvatura, temos $\Delta \mathbf{k} = \left(\frac{28\sqrt{2}}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3}, \frac{56}{3}\right)$.

Pela Eq.(4.23), a **torção** é o produto escalar de $\Delta \mathbf{h}$ por $\Delta \mathbf{k}$ dividido por $\lambda^6 k^2$, logo temos $\tau = -\frac{\Delta \mathbf{h} \cdot \Delta \mathbf{k}}{\lambda^6 k^2} = \frac{6\sqrt{2}}{13}$.

6.3. Método Função Implícita

Escolhendo x como parâmetro, pois $\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix} \neq 0$ no ponto $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, o

sistema (5.2) torna-se $\begin{cases} 2y\dot{y} + 2z\dot{z} = -2x \\ 2y\dot{y} = -2x + 1 \end{cases}$. Substituindo $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$ e $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$, temos $\begin{cases} \dot{y} + \sqrt{2}\dot{z} = -1 \\ \dot{y} = -1 + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{z} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \dot{y} = 0. \end{cases}$

O vetor $\dot{\alpha}$ é $\dot{\alpha}(\frac{1}{2}) = (1, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$. O **vetor tangente unitário** na direção contrária de $\dot{\alpha}$ é $\mathbf{t}(\frac{1}{2}) = \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

O sistema (5.3) torna-se $\begin{cases} 2y\ddot{y} + 2z\ddot{z} = -2 - 2y\dot{y} - 2z\dot{z} \\ 2y\ddot{y} = -2 - 2y\dot{y} \end{cases}$ Substituindo $x =$

$\frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}, z = \frac{\sqrt{2}}{2}, \dot{x} = 1, \dot{y} = 0, \dot{z} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, tem-se $\begin{cases} \ddot{z} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \ddot{y} = -2. \end{cases}$ Logo o **vetor**

derivada segunda é $\ddot{\alpha}(\frac{1}{2}) = \left(0, -2, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

A **curvatura** é $\kappa(u) = \frac{\|\dot{\alpha}(u) \times \ddot{\alpha}(u)\|}{\|\dot{\alpha}(u)\|^3} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{13}{3}}$.

O vetor curvatura é $\alpha''(x_0) = \mathbf{kn}(x_0)$, onde $\mathbf{n}(x_0) = \mathbf{b}(x_0) \times \mathbf{t}(x_0)$ e $\mathbf{b}(x_0) = \frac{\dot{\alpha}(x_0) \times \ddot{\alpha}(x_0)}{\|\dot{\alpha}(x_0) \times \ddot{\alpha}(x_0)\|}$.

Temos $\mathbf{b}(x_0) = (-\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{\sqrt{13}}{13}, -\frac{4\sqrt{26}}{26})$, $\mathbf{n}(x_0) = (-\frac{\sqrt{39}}{39}, -\frac{2\sqrt{39}}{13}, -\frac{\sqrt{78}}{39})$ e $\alpha''(x_0) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{13}{3}}(-\frac{\sqrt{39}}{39}, -\frac{2\sqrt{39}}{13}, -\frac{\sqrt{78}}{39})$.

O **vetor curvatura** é $\alpha''(x_0) = (-\frac{2}{9}, -\frac{4}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{9})$.

O sistema (??) torna-se $\begin{cases} 2y\ddot{y} + 2z\ddot{z} = -4y\ddot{y} - 2y\ddot{y} - 4z\ddot{z} - 2z\ddot{z} \\ 2y\ddot{y} = -4y\ddot{y} - 2y\ddot{y} \end{cases}$. Substituin-

do $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}, z = \frac{\sqrt{2}}{2}, \dot{x} = 1, \dot{y} = 0, \dot{z} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \ddot{x} = 0, \ddot{y} = -2, \ddot{z} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, temos

$\begin{cases} \ddot{y} + \sqrt{2}\ddot{z} = -2 - 1 \\ \ddot{y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \ddot{z} = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \ddot{y} = 0 \end{cases}$. Logo o **vetor terceira derivada** é

$\ddot{\alpha}(\frac{1}{2}) = (0, 0, -\frac{3\sqrt{2}}{2})$.

A **torção** é $\tau(u) = \frac{(\dot{\alpha}(u) \times \ddot{\alpha}(u)) \cdot \ddot{\alpha}(u)}{\|\dot{\alpha}(u) \times \ddot{\alpha}(u)\|^2} = \frac{6\sqrt{2}}{13}$.

Abstract. We present a method for computing the differential geometry properties of the intersection curve of two implicit surfaces, using the Implicit Function Theorem.

Referências

- [1] R.E. Barnhill, S.N. Kersey, A marching method for parametric surface/surface intersection, *Computer Aided Geometric Design*, **7**, No. 1-4, (1990), 257-280.
- [2] T.J. Willmore, "An Introduction to Differential Geometry". Clarendon Press, Oxford, 1959.
- [3] S.T. Wu, O. Alessio, S.I.R. Costa, On estimating local geometric properties of intersection curves. In "Proceedings of SIBGRAPI 2000", pp. 152-159, 2000.
- [4] X. Ye, T. Maekawa, Differential geometry of intersection curves of two surfaces, *Computer Aided Geometric Design*, **16** (1999), 767-788.