

Método de Galerkin Descontínuo com Penalização de Fluxos para a Equação Reação-Difusão

I. MOZOLEVSKI¹, P.R. BÖSING², L.I.A. SCHUH³, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, UFSC, 88.040-900 Florianópolis, SC, Brasil.

Resumo. Introduzimos um novo método de Galerkin descontínuo para problemas elípticos de segunda ordem com penalização simultânea nos saltos da solução e nos saltos dos fluxos da solução numérica. Efetuamos uma análise *a priori* do erro e demonstramos *hp* estimativas de convergência do método que são ótimas em *h* e quase-ótimas em *p*. As taxas de convergência demonstradas foram comprovadas com uma série de experiências numéricas para uma solução suave do problema. Também estudamos a convergência no caso de uma solução irregular.

1. Introdução

Nos primeiros artigos sobre o Método de Galerkin descontínuo de elementos finitos (em Inglês discontinuous Galerkin finite element method ou DGFEM) para equações elípticas de segunda ordem foram introduzidos termos na forma bilinear, que penalizam saltos de descontinuidade da solução numérica nas interfaces entre elementos e impõe de maneira fraca as condições de fronteira ([8], [16] e [1]). Além destas propriedades, uma escolha correta nos parâmetros de penalização pode garantir a coercividade da forma bilinear e portanto a estabilidade do método. Recentemente vários autores desenvolveram DGFEMs para problemas elípticos de segunda ordem: métodos não-simétricos com penalização interna foram introduzidos em Rivière, Wheeler, Girault [11], [12], Houston, Schwab e Süli [15], [7]). Métodos simétricos de Galerkin descontínuo com penalização interna foram introduzidos em Arnold [1] and Wheeler [16]. Todos estes métodos, que usam a penalização de saltos da solução, não possuem uma propriedade muito importante: não são localmente conservativos, o que prejudica possíveis aplicações a problemas de adveção-difusão e a sistemas de equações de Navier-Stokes. Já nos trabalhos de Baumann and Oden [4], [9] foi introduzido o método de Galerkin descontínuo sem penalização interna, que produz uma forma bilinear definida positiva que é localmente conservativa. Recentemente no trabalho [13] foi introduzido um método de Galerkin descontínuo com a penalização de fluxos, que também é localmente conservativo. Para este método, num par de espaços funcionais, tipo espaços de Sobolev particionado, foi demonstrado

¹igor@mtm.ufsc.br- Suporte parcial do CNPq-Brasil

²paulo@mtm.ufsc.br - CNPq-Brasil 152048/2006-5

³luciane@mtm.ufsc.br

a propriedade inf – sup para formulação fraca do problema. Uma outra linha de pesquisa, dedicada ao estudo de estabilização de fluxos nas arestas para métodos de elementos finitos contínuos/descontínuos para problemas elípticos e hiperbólicos, foi desenvolvida nos trabalhos [6] e [5].

Neste trabalho introduzimos um novo método de Galerkin descontínuo estabilizado, que inclui a penalização simultânea nos saltos da solução e no fluxo da solução numérica. Desenvolvemos análise de estimativas *a priori* do método na norma de energia. Resultados numéricos, que confirmam as taxas de convergência teóricas para soluções suaves são apresentadas em uma e duas dimensões e também estudamos o comportamento do método no caso da presença de descontinuidades.

2. Preliminares e Notação

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, domínio poliedral, limitado e aberto. Seja $\{\mathcal{T}_h\}$ ($h > 0$) uma família regular de partições de Ω composta por elementos κ , com diâmetro h_κ , abertos, disjuntos e convexos tal que $\bar{\Omega} = \bigcup_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \bar{\kappa}$. Designamos por $h = \max_{\kappa \in \mathcal{T}_h} h_\kappa$. Desse modo,

uma partição \mathcal{T}_h é dita ser regular se existe uma constante ϱ , tal que, $\frac{h_\kappa}{\rho_\kappa} \leq \varrho, \forall \kappa \in \mathcal{T}_h$, em que, $\rho_\kappa = \sup\{diam(S) : S \text{ é uma bola contida em } \kappa\}$.

Assumimos que cada elemento $\kappa \in \mathcal{T}_h$ é imagem de um elemento mestre fixo $\hat{\kappa}$ por uma aplicação afim, isto é, $\kappa = \mathcal{F}_\kappa(\hat{\kappa})$, em que $\hat{\kappa}$ é um quadrado aberto $\hat{\kappa} = (-1, 1)^2 \subset \mathbb{R}^2$. Sobre $\hat{\kappa}$ definimos o espaço de polinômios de grau $p \geq 1$ como

$$Q_p(\hat{\kappa}) = \text{span}\{\hat{x}^\alpha : 0 \leq \alpha_i \leq p, 1 \leq i \leq 2\}, \text{ onde, } \hat{x}^\alpha = \hat{x}_1^{\alpha_1} + \hat{x}_2^{\alpha_2}.$$

Para $\kappa \in \mathcal{T}_h$, associamos os valores do grau de aproximação polinomial local p_κ e o índice de Sobolev local s_κ . Coletando p_κ, s_κ e \mathcal{F}_κ em vetores $\mathbf{p} = \{p_\kappa : \kappa \in \mathcal{T}_h\}$, $\mathbf{s} = \{s_\kappa : \kappa \in \mathcal{T}_h\}$ e $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_\kappa : \kappa \in \mathcal{T}_h\}$, podemos definir

$$\begin{aligned} S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F}) &= \{v \in L_2(\Omega) : v|_\kappa \circ \mathcal{F}_\kappa \in Q_{p_\kappa}(\hat{\kappa}) \text{ se } \mathcal{F}_\kappa^{-1}(\kappa) = \hat{\kappa}, \forall \kappa \in \mathcal{T}_h\} \text{ e} \\ H^{\mathbf{s}}(\Omega, \mathcal{T}_h) &= \{v \in L_2(\Omega) : v|_\kappa \in H^{s_\kappa}(\kappa), \forall \kappa \in \mathcal{T}_h\}. \end{aligned}$$

O espaço $S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F})$ é o espaço de elementos finitos cujos elementos podem ser descontínuos nas interfaces entre elementos da malha. $H^{\mathbf{s}}(\Omega, \mathcal{T}_h)$ é o espaço de Sobolev particionado.

Seja ω um conjunto aberto em \mathbb{R}^2 , denotaremos $(\cdot, \cdot)_{t, \omega}$ e $\|\cdot\|_{t, \omega}$ como o produto interno e norma no espaço de Hilbert $H^t(\omega)$, respectivamente e $(\cdot, \cdot)_{0, \omega}$ e $\|\cdot\|_{0, \omega}$ o produto interno e norma em $L_2(\omega)$.

Seja \mathcal{E}_h o conjunto de todas as arestas abertas γ de todos os elementos $\kappa \in \mathcal{T}_h$. O conjunto \mathcal{E}_h será dividido em dois subconjuntos, \mathcal{E}_h° e \mathcal{E}_h^∂ , definidos por $\mathcal{E}_h^\circ = \{\gamma \in \mathcal{E}_h : \gamma \subset \Omega\}$, e $\mathcal{E}_h^\partial = \{\gamma \in \mathcal{E}_h : \gamma \subset \partial\Omega\}$. Vamos dividir o conjunto \mathcal{E}_h^∂ de forma que $\mathcal{E}_h^\partial = \mathcal{E}_h^D \cup \mathcal{E}_h^N$, onde \mathcal{E}_h^D refere-se à parte da $\partial\Omega$ em que a condição de Dirichlet é satisfeita e \mathcal{E}_h^N à parte na qual a condição de Neumann é satisfeita.

Para qualquer aresta $\gamma \in \mathcal{E}_h^\circ$ há dois elementos κ_i e κ_j ($i > j$), tais que, $\bar{\kappa}_i \cap \bar{\kappa}_j = \bar{\gamma}$. Então, para qualquer função $v \in H^s(\Omega, \mathcal{T}_h)$, $s > 1/2$, definimos a média e o salto

(dependem da numeração dos elementos) de v sobre γ por

$$\begin{aligned} \{v\} &= \begin{cases} \frac{1}{2} (v|_{\kappa_i})|_{\gamma} + \frac{1}{2} (v|_{\kappa_j})|_{\gamma}, & \text{se } \gamma \in \mathcal{E}_h^{\circ} \\ v|_{\gamma}, & \text{se } \gamma \in \mathcal{E}_h^{\partial} \end{cases} \\ [v] &= \begin{cases} (v|_{\kappa_i})|_{\gamma} - (v|_{\kappa_j})|_{\gamma}, & \text{se } \gamma \in \mathcal{E}_h^{\circ} \\ v|_{\gamma}, & \text{se } \gamma \in \mathcal{E}_h^{\partial}. \end{cases} \end{aligned}$$

Além disso, para cada aresta $\gamma \in \mathcal{E}_h^{\circ}$, associamos o vetor normal unitário $\nu = \mathbf{n}_{\kappa_i}$ para γ , que aponta de κ_i para κ_j , e para cada aresta $\gamma \in \mathcal{E}_h^{\partial}$, associamos o vetor normal unitário exterior $\nu = \mathbf{n}_{\kappa}$ em que $\gamma \subset \partial\kappa$.

A seguinte desigualdade é conhecida como desigualdade múltipla de traço, provada em [10], que estima a norma sobre a $\partial\kappa$, por normas sobre o elemento κ .

Lema 2.1. *Seja κ um triângulo ou um quadrilátero, tal que $h_{\kappa} \leq \varrho\rho_{\kappa}$ (forma regular). Então, para todo $u \in H^1(\Omega)$, (C constante positiva independente de h_{κ})*

$$\|u\|_{0,\partial\kappa}^2 \leq C \left(\frac{1}{h_{\kappa}} \|u\|_{0,\kappa}^2 + \|u\|_{0,\kappa} \|\nabla u\|_{0,\kappa} \right). \quad (2.1)$$

A demonstração do próximo lema pode ser encontrada em [2] e [3].

Lema 2.2. *Seja κ um triângulo ou um quadrilátero da partição \mathcal{T}_h e $u \in H^s(\kappa)$. Então existe uma constante $C > 0$ que depende de s e ϱ , mas independe de u , p_{κ} e h_{κ} , e uma sequência $z_p \in Q_{p_{\kappa}}(\kappa)$, tal que para todo q , $0 \leq q \leq s$*

$$\|u - z_p\|_{q,\kappa} \leq C \frac{h_{\kappa}^{\mu-q}}{p_{\kappa}^{s-q}} \|u\|_{s,\kappa}, \quad s \geq 0, \quad \mu = \min(p_{\kappa} + 1, s), \quad h_{\kappa} = \text{diam}(\kappa). \quad (2.2)$$

Por fim, apresentamos um resultado que relaciona normas sobre espaços de elementos finitos, que é conhecida como desigualdade inversa. A demonstração do lema seguinte pode ser encontrada em [14].

Lema 2.3. *Seja $v \in Q_{p_{\kappa}}(\kappa)$. Então*

$$\|\nabla v\|_{0,\kappa} \leq C \frac{p_{\kappa}^2}{h_{\kappa}} \|v\|_{0,\kappa}, \quad C \text{ constante que independe de } p \text{ e } h. \quad (2.3)$$

3. Métodos GSIPG e GNIPG

Consideremos o seguinte problema de reação-difusão

$$\begin{cases} -\Delta u + cu = f, & \text{em } \Omega \\ u = u_0, & \text{sobre } \mathcal{E}_h^D \\ \mathbf{n} \cdot \nabla u = g, & \text{sobre } \mathcal{E}_h^N \end{cases}. \quad (3.1)$$

Sendo $f \in L_2(\Omega)$ e c é uma constante positiva.

Definimos a seguinte forma bilinear de Galerkin descontínuo $B(\cdot, \cdot)$ sobre $H^2(\Omega, \mathcal{T}_h) \times H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ e o funcional linear $L(\cdot)$ sobre $H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$

$$\begin{aligned} B(u, v) &= \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \int_{\kappa} (\nabla u \nabla v + cuv) dx - \int_{\mathcal{E}_h^o \cup \mathcal{E}_h^D} (\{\mathbf{n} \cdot \nabla u\}[v] + \theta \{\mathbf{n} \cdot \nabla v\}[u]) ds \\ &\quad + \int_{\mathcal{E}_h^o \cup \mathcal{E}_h^D} \sigma [u][v] ds + \int_{\mathcal{E}_h^o \cup \mathcal{E}_h^N} \frac{1}{\sigma} [\mathbf{n} \cdot \nabla u][\mathbf{n} \cdot \nabla v] ds \\ L(v) &= \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \int_{\kappa} f v dx + \int_{\mathcal{E}_h^N} g \left(\frac{(\mathbf{n} \cdot \nabla v)}{\sigma} + v \right) ds - \int_{\mathcal{E}_h^D} u_0 (\theta (\mathbf{n} \cdot \nabla v) - \sigma v) ds. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Se $\theta = -1$, temos o Método de Galerkin com Penalização Interior Não-Simétrico Generalizado (General Non-Symmetric Interior Penalty Galerkin Method ou GNIPG) e, se $\theta = 1$, obtemos o Método de Galerkin com Penalização Interior Simétrico Generalizado (General Symmetric Interior Penalty Galerkin Method ou GSIPG). O parâmetro σ é o parâmetro de penalização, o qual foi introduzido para garantir a estabilidade do método. Assim, a formulação variacional descontínua é

$$\text{encontrar } u \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h) : B(u, v) = L(v), \quad \forall v \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h) \quad (3.3)$$

Observamos que se a solução u de (3.3) pertence a $H^2(\Omega) \cap H^s(\Omega, \mathcal{T}_h)$, $s \geq 2$, então u também é solução de (3.1), ou seja, esta formulação variacional é consistente.

Para $\forall v \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$, introduzimos a seguinte norma

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &= \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} (\|\nabla v\|_{0,\kappa}^2 + c\|v\|_{0,\kappa}^2) + \int_{\mathcal{E}_h^o \cup \mathcal{E}_h^D} \sigma [v]^2 ds + \int_{\mathcal{E}_h^o \cup \mathcal{E}_h^N} \frac{1}{\sigma} [\mathbf{n} \cdot \nabla v]^2 ds \\ &\quad + \int_{\mathcal{E}_h^o \cup \mathcal{E}_h^D} \frac{1}{\sigma} \{\mathbf{n} \cdot \nabla v\}^2 ds \end{aligned} \quad (3.4)$$

Teorema 3.1. (Continuidade) *Seja $B(\cdot, \cdot)$ forma bilinear como definida em (3.2). Então, existe uma constante $0 < \beta \leq 2$, que não dependente de p e h , tal que, $|B(u, v)| \leq \beta \|u\| \|v\|$, $\forall u, v \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$.*

A demonstração deste teorema segue aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz na forma bilinear.

O problema variacional (3.3) é bem posto devido aos seguintes resultados:

Teorema 3.2. (Coercividade GNIPG) *Seja $\sigma = K \frac{p^2}{h}$, então $\forall K > 0$, existe uma constante positiva α , independente de p e h , tal que, $B(v, v) \geq \alpha \|v\|^2$, $\forall v \in S^p(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F})$.*

Demonstração: Seja $\alpha > 0$ um número real e seja $v \in S^p(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F})$, então

$$\begin{aligned} B(v, v) - \alpha \|v\|^2 &= (1 - \alpha) \left(\sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \|\nabla v\|_{0,\kappa}^2 + c\|v\|_{0,\kappa}^2 + \int_{\mathcal{E}_h^o \cup \mathcal{E}_h^D} \sigma [v]^2 ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathcal{E}_h^o \cup \mathcal{E}_h^N} \frac{1}{\sigma} [\mathbf{n} \cdot \nabla v]^2 ds \right) - \alpha \int_{\mathcal{E}_h^o \cup \mathcal{E}_h^D} \frac{1}{\sigma} \{\mathbf{n} \cdot \nabla v\}^2 ds \end{aligned}$$

Seja $\gamma \in \mathcal{E}_h^D$, $\gamma \subset \partial\kappa$, $\kappa \in \mathcal{T}_h$, então da definição de média, (2.1), (2.3) e escolhendo $\sigma = K \frac{p_\kappa^2}{h_\kappa}$, com $K > 0$, temos que

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{\{\mathbf{n} \cdot \nabla v\}^2}{\sigma} ds &\leq \frac{\|\nabla v\|_{0,\partial\kappa}^2}{\sigma} \leq \frac{C_0}{\sigma} \left(\frac{1}{h_\kappa} \|\nabla v\|_{0,\kappa}^2 + \|\nabla v\|_{0,\kappa} \|\nabla^2 v\|_{0,\kappa} \right) \\ &\leq \frac{C_0}{\sigma} \frac{p_\kappa^2}{h_\kappa} \|\nabla v\|_{0,\kappa}^2 \leq \frac{C_0}{K} \|\nabla v\|_{0,\kappa}^2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Agora vamos considerar $\gamma_{lr} \in \mathcal{E}_h^\circ$, onde $\overline{\gamma_{lr}} = \partial\kappa_l \cap \partial\kappa_r$. Podemos observar que dependendo da malha teremos diâmetros h_{κ_l} e h_{κ_r} e o grau do polinômio p_{κ_l} e p_{κ_r} diferentes nos elementos κ_l e κ_r . Nesse caso escolhemos σ como $\sigma = K \frac{\max(p_{\kappa_l}^2, p_{\kappa_r}^2)}{\min(h_{\kappa_l}, h_{\kappa_r})}$.

$$\text{Então de (2.1) e (2.3) segue que } \int_{\gamma_{lr}} \frac{\{\mathbf{n} \cdot \nabla v\}^2}{\sigma} ds \leq \frac{C_0}{2K} (\|\nabla v\|_{0,\kappa_l}^2 + \|\nabla v\|_{0,\kappa_r}^2).$$

Logo,

$$-\alpha \int_{\mathcal{E}_h^\circ \cup \mathcal{E}_h^D} \frac{\{\mathbf{n} \cdot \nabla v\}^2}{\sigma} ds \geq -\alpha \frac{C_0}{K} \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \|\nabla v\|_{0,\kappa}^2. \quad (3.6)$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} B(v, v) - \alpha \|v\|^2 &\geq \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left(1 - \alpha - \alpha \frac{C_0}{K} \right) \|\nabla v\|_{0,\kappa}^2 + (1 - \alpha) c \|v\|_{0,\kappa}^2 \\ &\quad + (1 - \alpha) \left(\int_{\mathcal{E}_h^\circ \cup \mathcal{E}_h^D} \sigma [v]^2 ds + \int_{\mathcal{E}_h^\circ \cup \mathcal{E}_h^N} \frac{1}{\sigma} [\mathbf{n} \cdot \nabla v]^2 ds \right) \end{aligned}$$

Então, $B(v, v) - \alpha \|v\|^2 \geq 0$, se $(1 - \alpha - \alpha \frac{C_0}{K}) \geq 0$ e $(1 - \alpha) \geq 0 \Rightarrow 0 < \alpha \leq \frac{1}{1 + \frac{C_0}{K}}$. \square

Teorema 3.3. (Coercividade GSIPG) *Seja $\sigma = K \frac{p_h^2}{h}$, sendo K uma constante positiva. Então, para $K > K_0 > 0$, existe uma constante $\alpha > 0$ independente de p e h , tal que, $B(v, v) \geq \alpha \|v\|^2$, $\forall v \in S^p(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F})$.*

Demonstração: Seja $\alpha > 0$ um número real e seja $v \in S^p(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F})$, então

$$\begin{aligned} B(v, v) - \alpha \|v\|^2 &= (1 - \alpha) \left(\sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} (\|\nabla v\|_{0,\kappa}^2 + c \|v\|_{0,\kappa}^2) + \int_{\mathcal{E}_h^\circ \cup \mathcal{E}_h^N} \frac{[\mathbf{n} \cdot \nabla v]^2}{\sigma} ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathcal{E}_h^\circ \cup \mathcal{E}_h^D} \sigma [v]^2 ds \right) - \int_{\mathcal{E}_h^\circ \cup \mathcal{E}_h^D} \left(2\{\mathbf{n} \cdot \nabla v\}[v] + \frac{\alpha}{\sigma} \{\mathbf{n} \cdot \nabla v\}^2 \right) ds \end{aligned}$$

Para um número real arbitrário $\epsilon > 0$ e para toda aresta $\gamma \in \mathcal{E}_h^\circ \cup \mathcal{E}_h^D$ temos

$$2 \int_\gamma \{\mathbf{n} \cdot \nabla v\}[v] ds \leq \epsilon \int_\gamma \frac{1}{\sigma} \{\mathbf{n} \cdot \nabla v\}^2 ds + \frac{1}{\epsilon} \int_\gamma \sigma [v]^2 ds$$

Logo de (3.6) obtemos $2 \int_{\mathcal{E}_h^{\circ} \cup \mathcal{E}_h^D} \{\mathbf{n} \cdot \nabla v\}[v] ds \leq \frac{C_0 \epsilon}{K} \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \|\nabla v\|_{0,\kappa}^2 + \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathcal{E}_h^{\circ} \cup \mathcal{E}_h^D} \sigma[v]^2 ds$

Consequentemente,

$$B(v, v) - \alpha \|v\|^2 \geq \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left(1 - \alpha - \epsilon \frac{C_0}{K} - \alpha \frac{C_0}{K}\right) \|\nabla v\|_{0,\kappa}^2 + (1 - \alpha) \left(\sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} c \|v\|_{0,\kappa}^2 + \int_{\mathcal{E}_h^{\circ} \cup \mathcal{E}_h^N} \frac{1}{\sigma} [\mathbf{n} \cdot \nabla v]^2 ds \right) + \left(1 - \alpha - \frac{1}{\epsilon}\right) \int_{\mathcal{E}_h^{\circ} \cup \mathcal{E}_h^D} \sigma[v]^2 ds$$

Então para que $B(v, v) - \alpha \|v\|^2 \geq 0$, devemos ter

$$\left(1 - \alpha - \epsilon \frac{C_0}{K} - \alpha \frac{C_0}{K}\right) \geq 0, \quad 1 - \alpha \geq 0, \quad \left(1 - \alpha - \frac{1}{\epsilon}\right) \geq 0$$

Da segunda e terceira equação temos $0 < \alpha \leq 1 - \frac{1}{\epsilon}$. Como $\alpha > 0 \Rightarrow \epsilon > 1$. Da primeira equação temos $0 < \alpha \leq \frac{K - C_0}{K + C_0}$. Tomando K suficientemente grande, $K > K_0$, teremos satisfeitas as duas exigências sobre α (no mínimo $K_0 > C_0$).

□

4. Estimativa de Erros *A Priori*

Teorema 4.1. *Seja $u \in H^2(\Omega) \cap H^s(\mathcal{T}_h)$, $s \geq 2$, a solução de (3.3), e seja $u_h \in S^p(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F})$ a solução discreta descontínua de $B(u_h, v) = L(v)$, $\forall v \in S^p(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F})$. Então escolhendo $\sigma = K \frac{p^2}{h}$, ($K > 0$ para GNIPG e $K \geq K_0$ para GSIPG), o erro $e = u - u_h$ satisfaz a seguinte estimativa*

$$\|e\| \leq C_0 \frac{h^{\mu-1}}{p^{s-\frac{3}{2}}} \|u\|_{s,\Omega}, \quad \text{em que } \mu = \min(p+1, s) \text{ e } p \geq 1.$$

Demonstração: Seja z_p o interpolador de Babuška-Suri para u em $S^p(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F})$. Considere $\eta = u - z_p$ e $\epsilon = u_h - z_p$. Então, $\|e\| = \|\eta - \epsilon\| \leq \|\eta\| + \|\epsilon\|$.

Da propriedade de ortogonalidade de Galerkin, temos $B(u - u_h, v) = 0$, $\forall v \in S^p(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F})$. Desde que $\epsilon \in S^p(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F})$ e $u - u_h = \eta - \epsilon$, se $v = \epsilon \Rightarrow B(\eta, \epsilon) = B(\epsilon, \epsilon)$. Usando a continuidade e a coercividade de $B(\cdot, \cdot)$, temos que $\|\epsilon\|^2 \leq \alpha B(\epsilon, \epsilon) = \alpha B(\eta, \epsilon) \leq \alpha \beta \|\eta\| \|\epsilon\| \Rightarrow \|\epsilon\| \leq C_0 \|\eta\|$. Usando (2.2), obtemos

$$\|\nabla \eta\|_{0,\kappa}^2 + c \|\eta\|_{0,\kappa}^2 \leq C_0 \left(\frac{h_\kappa^{\mu-1}}{p_\kappa^{s-1}}\right)^2 \|u\|_{s,\kappa}^2 + C_0 \left(\frac{h_\kappa^\mu}{p_\kappa^s}\right)^2 \|u\|_{s,\kappa}^2 \leq C_0 \frac{h_\kappa^{2\mu-2}}{p_\kappa^{2s-2}} \|u\|_{s,\kappa}^2, \quad s \geq 1$$

Seja $\gamma \in \mathcal{E}_h^{\circ} \cup \mathcal{E}_h^D$, onde associamos γ ao elemento κ , consequentemente temos

$$\int_{\gamma} \frac{1}{\sigma} (\mathbf{n} \cdot \nabla \eta)^2 ds \leq \frac{C_0}{\sigma} \left(\frac{1}{h_\kappa} \|\eta\|_{1,\kappa}^2 + \|\eta\|_{1,\kappa} \|\eta\|_{2,\kappa} \right) \stackrel{(2.2)}{\leq} \frac{C_0}{K} \frac{h_\kappa^{2\mu-2}}{p_\kappa^{2s-1}} \|u\|_{s,\kappa}^2$$

Fazendo estimativas similares para os demais termos, obtemos

$$\|e\| \leq (1 + \alpha\beta)\|\eta\| \leq C_0 \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \frac{h_\kappa^{\mu-1}}{p_\kappa^{s-\frac{3}{2}}} \|u\|_{s,\kappa}.$$

□

5. Resultados Numéricos

Nesta seção apresentamos os resultados de algumas experiências numéricas que visam analisar o desempenho dos métodos de Galerkin descontínuos GNIPG e GSIPG, apresentados na seção 3.

Tabela 1: Ordens de convergências em $L_2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ e $H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)$ para as formulações GSIPG e GNIPG com ordem de aproximação polinomial de 2 até 5.

| p | Nível | Ordens em $\ e\ _{L_2}$ | | Ordens em $\ e\ _{H^1}$ | |
|---|-------|-------------------------|--------|-------------------------|--------|
| | | SIPG | NIPG | SIPG | NIPG |
| 2 | 3 | -0.3464 | 1.2487 | -0.9254 | 1.6605 |
| | 4 | 6.2341 | 1.4855 | 5.3175 | 1.7121 |
| | 5 | 3.3881 | 1.6942 | 2.4300 | 1.7944 |
| 3 | 3 | 5.5260 | 4.0418 | 4.6822 | 3.1346 |
| | 4 | 4.4532 | 3.9420 | 3.3325 | 3.0345 |
| | 5 | 4.1015 | 3.9494 | 3.0412 | 3.0154 |
| 4 | 3 | 5.3801 | 3.3402 | 4.7657 | 3.3940 |
| | 4 | 5.2285 | 3.6122 | 4.3620 | 3.8184 |
| | 5 | 5.1094 | 3.7777 | 4.1568 | 3.8816 |
| 5 | 3 | 7.3849 | 6.2034 | 7.0721 | 5.3717 |
| | 4 | 6.5149 | 5.9253 | 5.5123 | 5.0439 |
| | 5 | 6.1061 | 5.9605 | 5.0703 | 5.0233 |

Inicialmente consideramos um exemplo do problema 3.1 em uma dimensão

$$\begin{cases} -\frac{d^2 u}{dx^2} = f, & \text{sobre } \Omega = (-1, 1) \\ u(-1) = u_L, \quad u(1) = u_R, \end{cases}$$

em que f , u_L e u_R foram escolhidos de tal maneira que a solução exata do problema seja $u(x) = \arctan(\delta x)$, sendo δ uma constante.

Na Tabela 1 apresentamos as ordens de convergência numérica dos métodos GSIPG e GNIPG calculadas nas normas dos espaços $L_2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ e $H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)$, para aproximação polinomial variando de 2 até 5, quando a solução do problema é suave, isto é, $\delta = 1$. Pode-se observar nesta que as ordens de convergência de ambos os métodos na norma de energia (em H^1) são próximas do valor teórico h^p conforme

Teorema 4.1. Pode-se observar também que as ordens de convergência da formulação GSIPG são superiores as da formulação GNIPG na norma em L_2 , e são próximas de h^{p+1} , o que já era esperado devido a dual consistência desta formulação.

A seguir vamos estudar a aproximação dos métodos para o problema considerando que a solução acima apresentada é “irregular”, o que corresponde ao valor $\delta = 400$ (neste caso a solução exata do problema é uma aproximação da função de Heaviside que tem uma descontinuidade (salto) na origem). Consideramos a aproximação desta solução com métodos GNIPG e GSIPG usando uma malha $2^6 \times Q_3$ e apresentamos os respectivos resultados na Fig. 1(a). Nesta pode-se observar que quando os saltos da solução numérica são fortemente penalizados ($K = 1.e + 4$), todos os métodos condizem com a solução exata nas regiões fora da descontinuidade, e apresentam fortes oscilações na vizinhança do ponto de “descontinuidade”. Quando, ao contrário, os saltos dos fluxos são penalizados e os saltos da solução não ($K = 1.e - 4$), o método GNIPG oscila fortemente no ponto de “descontinuidade” e não aproxima bem a solução exata mesmo fora deste ponto, onde a solução é suave. Entretanto, o método GSIPG mostra um bom comportamento quando comparado com a penalização dos saltos da solução.

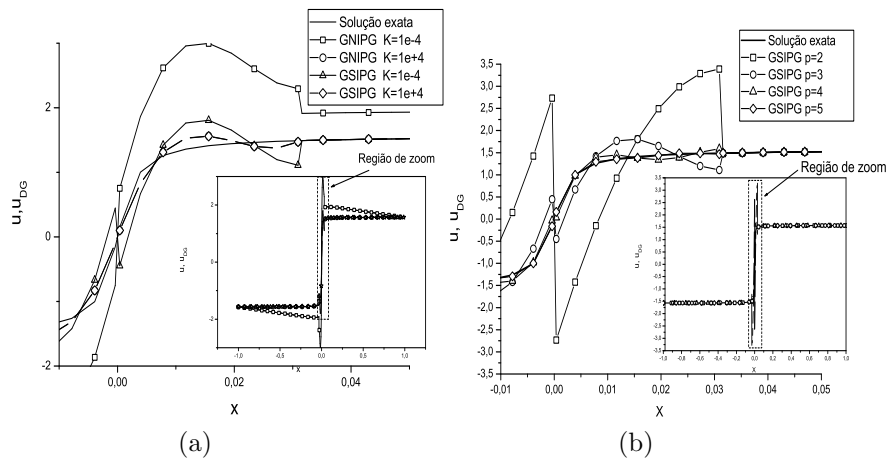


Figura 1: Comparação entre a solução exata e soluções numéricas obtidas com (a) as formulações GNIPG e GSIPG quando $K = 1.e - 4$ e $K = 1.e + 4$; (b) método GSIPG com penalização de fluxos ($\delta = 1.e - 4$) para várias ordens de aproximação $p = 2, 3, 4, 5$ com malha 2^6 .

Na Fig. 1(b) apresentamos resultados da aproximação do método GSIPG com penalização de fluxos ($\delta = 1.e - 4$) para várias ordens de aproximação com malha $2^6 \times Q_p$, $p = 2, 3, 4, 5$. Os resultados, apresentados nesta figura, mostram que o método converge para solução exata mesmo na vizinhança do ponto de “descontinuidade” a medida que a ordem de aproximação polinomial aumenta, ou seja, o método GSIPG, que neste caso só penaliza os fluxos (e portanto é conservativo), mostra uma boa convergência espectral inclusive na vizinhança do ponto “irregular”.

Por fim, na Fig. 2 apresentamos as soluções numéricas obtidas com $p = 2$ (esquerda) e $p = 5$ (direita) usando a formulação GSIPG para o problema modelo em duas dimensões, $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1)$, quando o lado direito $f(x, y)$ e u_0 são escolhidos de tal modo que a solução exata seja $u(x, y) = \arctan(\delta(y - x))$. Neste caso $\delta = 400$, $K = 1.e - 4$ e a malha é formada por $2^5 \times 2^5$. Através desta figura pode-se ver que o método GSIPG com penalização de fluxos, da mesma forma como no domínio unidimensional, apresentou convergência espectral na vizinhança da descontinuidade.

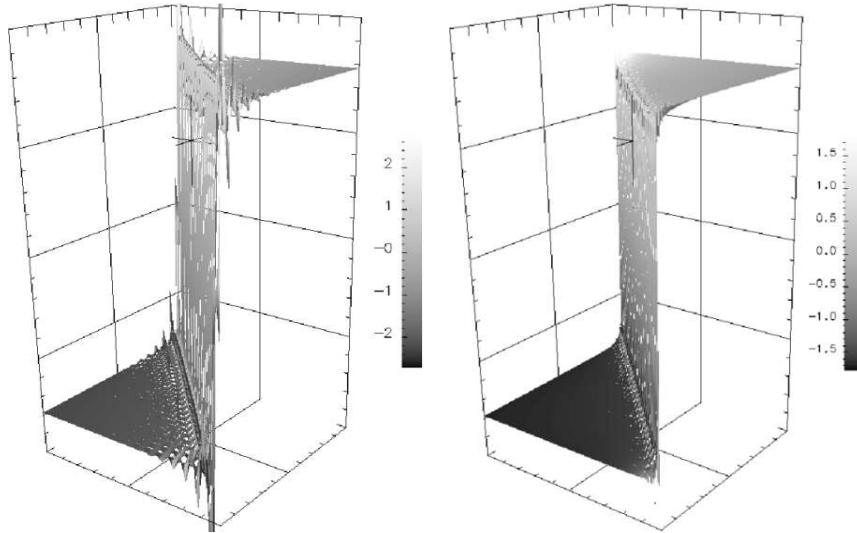


Figura 2: Soluções numéricas obtidas em domínio bidimensional com a ordem de aproximação $p = 2$ (esquerda) e $p = 5$ (direita) usando a formulação GSIPG.

6. Conclusões

Um novo método de Galerkin descontínuo com penalização simultânea dos saltos da solução e saltos dos fluxos da solução numérica foi introduzido para problemas elípticos da segunda ordem. Uma análise *a priori* do erro foi efetuada e foram demonstradas as *hp* estimativas de convergência do método que são ótimas em h e quase-ótimas em p . Comprovamos as taxas de convergência demonstradas com uma série de experiências numéricas para uma solução suave do problema e estudamos a convergência no caso de uma solução irregular. Neste caso o método GSIPG, somente com penalização nos fluxos da solução numérica, que se mantém conservativo para esta escolha de parâmetros, mostrou melhor desempenho tanto na aproximação de soluções suaves como na aproximação de soluções irregulares. Este fato pode tornar este método um forte candidato para ser usado na aproximação de equações de advecção-difusão e equações de Navier-Stokes, cujas soluções possuem

descontinuidades e singularidades.

Abstract. A new version of discontinuous Galerkin finite element method with the simultaneous penalization of the jumps of the numerical solution and of the jumps of the fluxes are introduced for the second order elliptic boundary value problems. The a priori error analysis of hp type was developed and estimates of the error of the method, optimal in h and slightly suboptimal in p were obtained. We confirm numerically the theoretically predicted orders of the convergence for a smooth solutions and study the convergence of the method for irregular solutions to the problem.

Referências

- [1] D.N. Arnold, An interior penalty finite element method with discontinuous elements, *SIAM J. Numer. Anal.*, **19** (1982), 742–760.
- [2] I. Babuška, M. Suri, The hp version of the finite element method with quasi-uniform meshes, *RAIRO, Math. Mod. Numer. Anal.*, **21** (1987), 199–238.
- [3] I. Babuška, M. Suri, The optimal convergence rate of the p -version of the finite element method, *SIAM J. Numer. Anal.*, **24** No. 4, 1987.
- [4] C.E. Baumann, “An H-P Adaptive Discontinuous Finite Element Method for Computational Fluid Dynamics”, PhD thesis, The University of Texas at Austin, 1997.
- [5] E. Burman, A. Ern, Continuous interior penalty hp -finite element methods for transport operators, *Math. Comp.*, Submitted, 2005.
- [6] E. Burman, P. Hansbo, Edge stabilization for galerkin approximations of convection-diffusion-reaction problems, *Comp. Meth. Mech. Eng.*, **193** (2004), 1437–1453.
- [7] P. Houston, C. Schwab, E. Süli, Discontinuous hp -finite element methods for advection-diffusion-reaction problems, *SIAM Journal of Numerical Analysis.*, **39** (2002), 2133–2163.
- [8] J. Nitsche, Über ein Variationsprinzip zur Lösung von Dirichlet-Problemen bei der Verwendung von Teilräumen, die keinen Randbedingungen unterworfen sind, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **36** (1971), 9–15.
- [9] J. T. Oden, I. Babuska, C. Baumann, The local discontinuous Galerkin finite element method for diffusion problems, *J. Comput. Phys.*, **146** (1998), 491–519.
- [10] S. Prudhomme, F. Pascal, J.T. Oden, A. Romkes, Review of a priori error estimation for discontinuous Galerkin methods. Technical Report TICAM REPORT 00-27, Texas Institute for Computational and Applied Mathematics, The University of Texas at Austin, 2000.

- [11] B. Rivière, Mary F. Wheeler, A Discontinuous Galerkin Method Applied to Nonlinear Parabolic Equations, volume 11 of *Lectures Notes in Computational Science and Engineering*, pages 231–244. 1999.
- [12] B. Rivière, M.F. Wheeler, V. Girault, Improved energy estimates for interior penalty, constrained and discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. part 1, *Computational Geosciences*, **3** (1999), 337–360.
- [13] A. Romkes, J. T. Oden, S. Prudhomme, A priori error analyses of a stabilized discontinuous Galerkin methods, *Computers and Mathematics with Applications*, **46** (2003), 1289–1311.
- [14] C. Schwab, “p- and hp- Finite Element Methods. Theory and Applications to Solid and Fluid Mechanics”, Oxford University Press, 1998.
- [15] E. Süli, C. Schwab, P. Houston, hp-DGFEM for Partial Differential Equations with Nonnegative Characteristic Form, volume 11 of *Lectures Notes in Computational Science and Engineering*, pages 221–230. Spriger, Berlin, 1999.
- [16] M.F. Wheeler, An elliptic collocation finite element method with interior penalties, *SIAM J. Numer. Anal.*, **15** (1978), 152–161.