Trends in Computational and Applied Mathematics

Trends in Computational and Applied Mathematics, **25** (2024), e01717
Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional
Online version ISSN 2676-0029 www.scielo.br/tcam
ARTIGO ORIGINAL
doi: 10.5540/tcam.2024.025.e01717

Existência e Comportamento de Funções Média do Semicírculo

R. S. PAROLIN[1*], G. C. IRALA[2] e A. DARÓS[3]

Recebido em 12 de agosto de 2022 / Aceito em 1 de novembro de 2023

RESUMO. Este artigo tem por objetivo explorar soluções que representam relações de dependência entre grandezas geométricas, visando não só determinar associações não usuais entre a geometria e álgebra, como também desenvolver objetos de aprendizagem com Geometria Dinâmica. Neste contexto, analisam-se soluções que relacionam grandezas geométricas do triângulo e do semicírculo, estabelecendo relações entre as médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática, no intuito de compreender as características e propriedades trigonométricas, examinar polinômios e suas raízes, bem como abordar a geometria de forma computacional e dinâmica.

Palavras-chave: grandezas geométricas, médias, funções.

1 INTRODUÇÃO

A geometria é uma das mais antigas áreas da Matemática. Segundo Pavanello [6], é possível verificar que os primeiros indícios de utilização de conhecimentos geométricos apareceram no setor da agricultura. O que parece mais provável é que tais conhecimentos foram sendo construídos empiricamente como resposta à necessidade de ordem prática das comunidades.

Por volta do século VI a.C, uma nova metodologia passou a ser utilizada no estudo da geometria. Os gregos ganharam espaço e passaram a identificar a construção sistemática dos fundamentos da geometria, onde a Matemática é intimamente relacionada com a filosofia, ou seja, desprender do sentido prático, estando mais relacionada com a racionalidade. Foi durante esse período de predominância grega que surge, um dos mais importantes matemáticos da história, Euclides de Alexandria, que é conhecido por seu trabalho *Elements*, no qual ele coletou e organizou sistematicamente todos os conhecimentos de geometria, que ditaram a forma do saber geométrico por vários séculos [3].

*Autor correspondente: Radael de Souza Parolin – E-mail: radaelparolin@unipampa.edu.br
[1]Universidade Federal do Pampa, Rua Luiz Joaquim de Sá Britto s/n, 97650-000, Itaqui, RS, Brasil – E-mail:radaelparolin@unipampa.edu.br, https://orcid.org/0000-0003-3803-8920
[2]Universidade Federal do Pampa, Rua Luiz Joaquim de Sá Britto s/n, 97650-000, Itaqui, RS, Brasil – E-mail:gabrielirala.aluno@unipampa.edu.br, https://orcid.org/0000-0003-3379-3513
[3]Universidade Federal do Pampa, Rua Luiz Joaquim de Sá Britto s/n, 97650-000, Itaqui, RS, Brasil – E-mail:alissondaros@unipampa.edu.br, https://orcid.org/0000-0002-2082-6999

Com progresso na geometria, já no século XVII, René Descartes (1596-1650) estabeleceu relações entre a geometria e a álgebra [1]. Neste sentido, o conceito de média associado inicialmente à ideia de substituir uma sequência de números por um único que represente toda a sequência, sem alterar determinadas características, pode ser utilizado para relacionar grandezas geométricas de forma algébrica. As médias são essenciais para fazer estimativas de tendências de crescimento populacional, taxas de rendimento em investimentos ao longo de um dado tempo, velocidade média [4]. Apesar do conceito de média ser simples, é importante saber identificar as situações adequadas para uma aplicação correta de cada tipo de relação envolvendo os conceitos de média, pois uma aplicação incorreta pode gerar erros relevantes e estimativas discrepantes com a realidade.

O presente trabalho tem como problemática, investigar a existência de relações entre grandezas geométricas a partir das definições de médias entre o comprimento de segmentos no semicírculo, visando não só determinar associações ainda desconhecidas entre a geometria e álgebra no semicírculo, como também estabelecer graficamente estas relações a partir de simulações computacionais e da Geometria Dinâmica [5] [2].

A Figura 1(a) representa as médias do semicírculo obtidas geometricamente a partir de relações trigonométricas do triângulo retângulo e denota as estruturas as quais estamos interessados a relacionar.

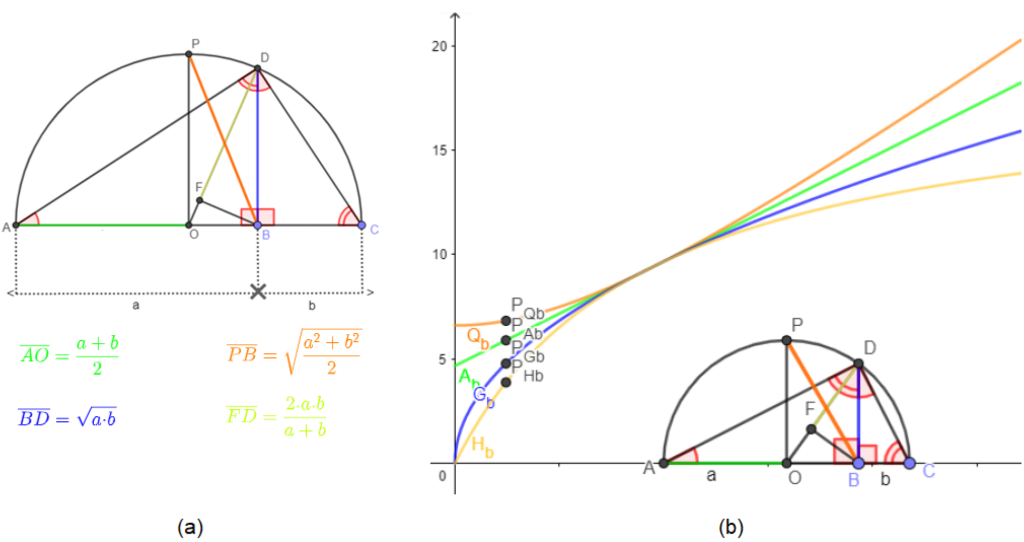

Figura 1: (a) Representação das médias Aritmética ($\overline{AO}$), Geométrica ($\overline{BD}$), Harmônica ($\overline{FD}$) e Quadrática ($\overline{PB}$); (b) Funções médias $Q(b), A(b), G(b), H(b)$.

2 RELAÇÕES ENTRE MÉDIAS NO SEMICÍRCULO

Para compreensão dos objetos geométricos bem como de suas propriedades é neces-sário o conhecimento de métodos algébricos que possibilitem explicitar as diferentes relações entre as grandezas envolvidas na problemática abordada, com foco na abstração e fundamentação matemática das aplicações envolvidas.

Neste sentido, é interessante investigar, por exemplo, a existência de relações entre grandezas geométricas do triângulo e do círculo, comparando a partir da equação

$$Q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \tag{2.1}$$

da média quadrática, representada pelo segmento $\overline{PB}$ na Figura 1(a), sua relação com as médias aritmética, geométrica e harmônica. Fixando a medida a e deixando a medida b variável em função das médias, isolamos esta variável em todas as equações de médias, obtendo

$$A = \frac{a+b}{2} \Rightarrow b = 2A - a \tag{2.2}$$

$$G = \sqrt{a \cdot b} \Rightarrow b = \frac{G^2}{a} \tag{2.3}$$

$$Q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Rightarrow b = \sqrt{2Q^2 - a^2} \tag{2.4}$$

$$H = \frac{2ab}{a+b} \Rightarrow b = \frac{aH}{2a-H}. \tag{2.5}$$

Agora, podemos relacionar a equação (2.1) com a equação (2.2), substituindo a variável b por $2A - a$, de modo a obter

$$Q(A) = \sqrt{(a-A)^2 + a^2}. \tag{2.6}$$

Da mesma maneira, relacionando a equação (2.1) com as equações (2.3) e (2.5), obtemos respectivamente,

$$Q(G) = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4+G^4}{2}} \tag{2.7}$$

$$Q(H) = \frac{a}{2a-H}\sqrt{H^2 - 2aH + 2a^2}. \tag{2.8}$$

Vamos agora relacionar a média aritmética, representada pelo segmento $\overline{AO}$ na Figura 1(a). Primeiramente relacionando com a média geométrica a partir das equações (2.2) e (2.3), depois com a média quadrática a partir das equações (2.2) e (2.4), e por último com a média harmônica a partir das equações (2.2) e (2.5), obtendo

$$A(G) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{G^2}{a}\right) \tag{2.9}$$

$$A(Q) = \frac{a + \sqrt{2Q^2 - a^2}}{2} \tag{2.10}$$

$$A(H) = \frac{a^2}{2a - H}. \tag{2.11}$$

Da mesma forma, vamos agora relacionar a média geométrica, representada pelo segmento $\overline{BD}$ na Figura 1(a), com as equações (2.2), (2.4) e (2.5), obtemos respectivamente

$$G(A) = \sqrt{2aA - a^2} \tag{2.12}$$

$$G(Q) = \sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{2Q^2 - a^2} \tag{2.13}$$

$$G(H) = \sqrt{\frac{a^2 H}{2a - H}}. \tag{2.14}$$

Resta agora relacionar a média harmônica, representada pelo segmento $\overline{FD}$ na Figura 1(a), com as equações (2.2), (2.3) e (2.4), então, dessas relações temos

$$H(A) = 2a - \frac{a^2}{A} \tag{2.15}$$

$$H(G) = \frac{2G^2}{a^2 + G^2} \tag{2.16}$$

$$H(Q) = \frac{2a\sqrt{2Q^2 - a^2}}{a + \sqrt{2Q^2 - a^2}}. \tag{2.17}$$

Na Figura 1(b) são apresentadas as funções médias dadas pelas equações (2.2) a (2.5) considerando a constante e b variável, ambos positivos devido a geometria do problema. As funções da média quadrática dependentes das outras médias são apresentadas na Figura 2(a), conforme equações (2.6) a (2.8). As funções da média aritmética dependentes das outras médias estão representadas na Figura 2(b), segundo equações (2.9) a (2.11). Na Figura 2(c) temos as funções da média geométrica dependentes das outras médias, de acordo com as equações (2.12) a (2.14). E na Figura 2(d) está representada as funções da média harmônica segundo as equações (2.15) a (2.17).

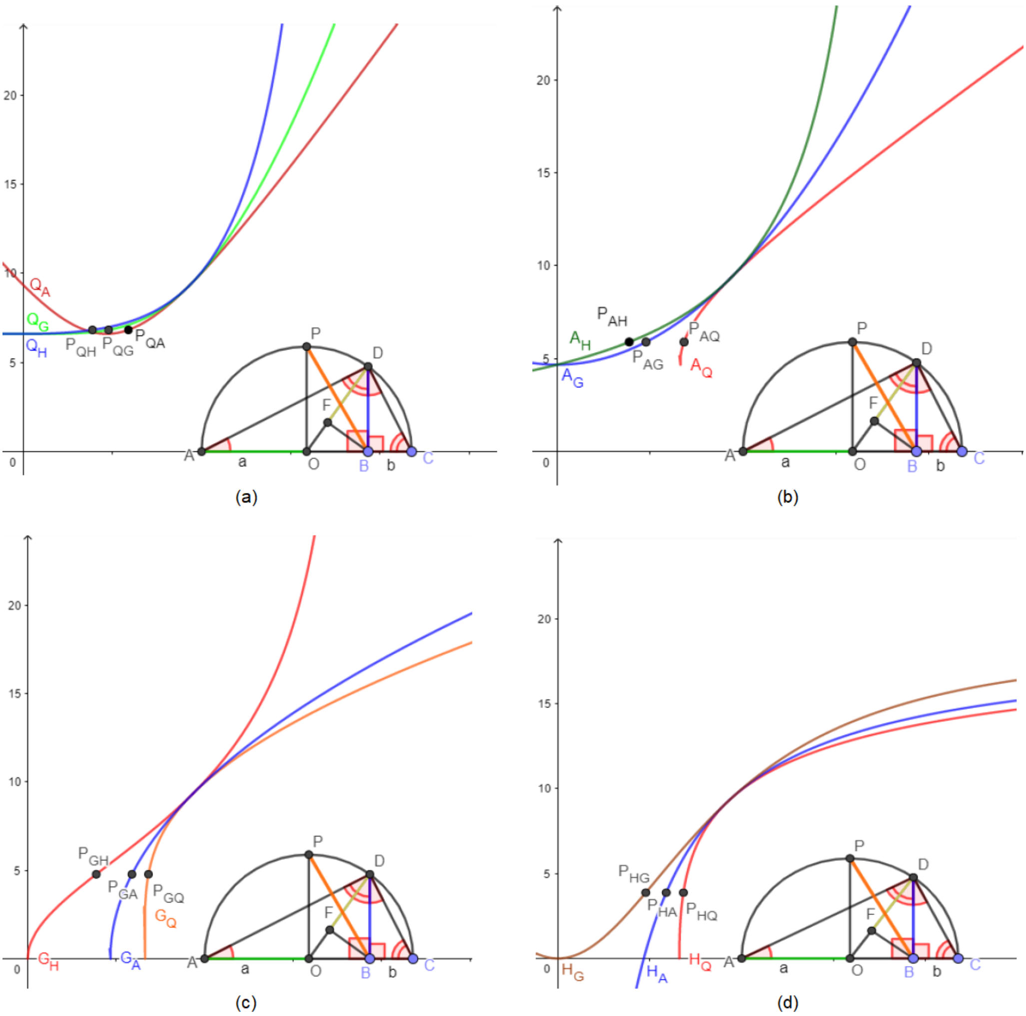

Figura 2: Funções em relação às outras médias - (a) Média quadrática; (b) Média aritmética; (c) Média geométrica; (d) Média harmônica.

3 A FAMÍLIA DE FUNÇÕES Q

Nesta seção, vamos analisar as relações obtidas na seção anterior e verificar algebricamente as informações obtidas graficamente para a família de equações (2.6), (2.7) e (2.8), Figura 2(a).

Iniciamos com a equação (2.6) que relaciona a média quadrática com a média aritmética. Neste sentido, analisando o sinal da função $f(A) = (a-A)^2 + A^2$, observamos que o domínio de $Q(A)$ são todos os valores reais positivos, tendo em vista a geometria do problema. Com relação às assíntotas horizontais, temos que $Q(A) \to +\infty$ quando $A \to +\infty$ e, portanto, $Q(A)$ não possui assintotas horizontais. Em se tratando de assíntotas verticais, como a função $Q(A)$ contínua no domínio considerado, conclui-se que não existem assíntotas verticais. Agora, passando a analisar a derivada de primeira ordem da equação (2.6), a saber

$$Q^{'}(A) = \frac{2A-a}{\sqrt{2A^2-2Aa+a^2}}, \tag{3.1}$$

obtemos que $Q(A)$ possui ponto crítico em $A = \frac{a}{2}$. Além disso, aplicando o teste da primeira derivada, $Q(A)$ é decrescente no intervalo $(0, \frac{a}{2})$ e crescente em $(0, \frac{a}{2})$, com valor mínimo igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (Q_{A0} na Figura 3(a)).

Por fim, derivando a equação (3.1), obtemos

$$Q^{''}(A) = \frac{a^2}{(2A^2-2Aa+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

e, como $a > 0$, o teste da segunda derivada confirma que $\frac{a}{2}$ é ponto de mínimo e que $Q(A)$ possui concavidade voltada para cima. Na Figura 3(a) podemos observar as características e propriedades discutidas, no caso específico para $a = 5$, ou através da geometria dinâmica com diferentes valores de a, disponível no link `https://www.geogebra.org/classic/yf9u2gwu`.

Considerando agora a equação (2.7), e procedendo como acima, verificamos que no contexto geométrico em que estamos trabalhando, $Q(G)$ possui como dominio o intervalo $(0,+\infty)$. Ademais, quando $G \to +\infty$, $Q(G) \to +\infty$, ou seja, $Q(G)$ não possui assíntotas horizontais. Analogamente ao caso de $Q(A)$, também temos a continuidade de $Q(G)$ e, portanto, também não possui assíntotas verticais.

Além disso, derivando duas vezes a expressão em (2.7), obtemos, após algumas simplificações,

$$Q^{'}(G) = \frac{2G^3}{a\sqrt{2G^4+2a^4}} \quad e \quad Q^{''}(G) = \frac{2G^6+6a^4G^2}{a(G^4+a^4)\sqrt{2G^4+2a^4}}.$$

Então, $Q(G)$ não possui pontos críticos em $(0,+\infty)$. Aplicando os testes da primeira e segunda derivada, concluímos que esta função é crecente neste intervalo $(0,+\infty)$, bem como possui concavidade voltada para cima já que $Q^{'}(G)$ e $Q^{''}(G)$ são estritamente positivas neste intervalo. Na Figura 3(b) podemos observar as características e propriedades discutidas, no caso específico para $a = 5$.

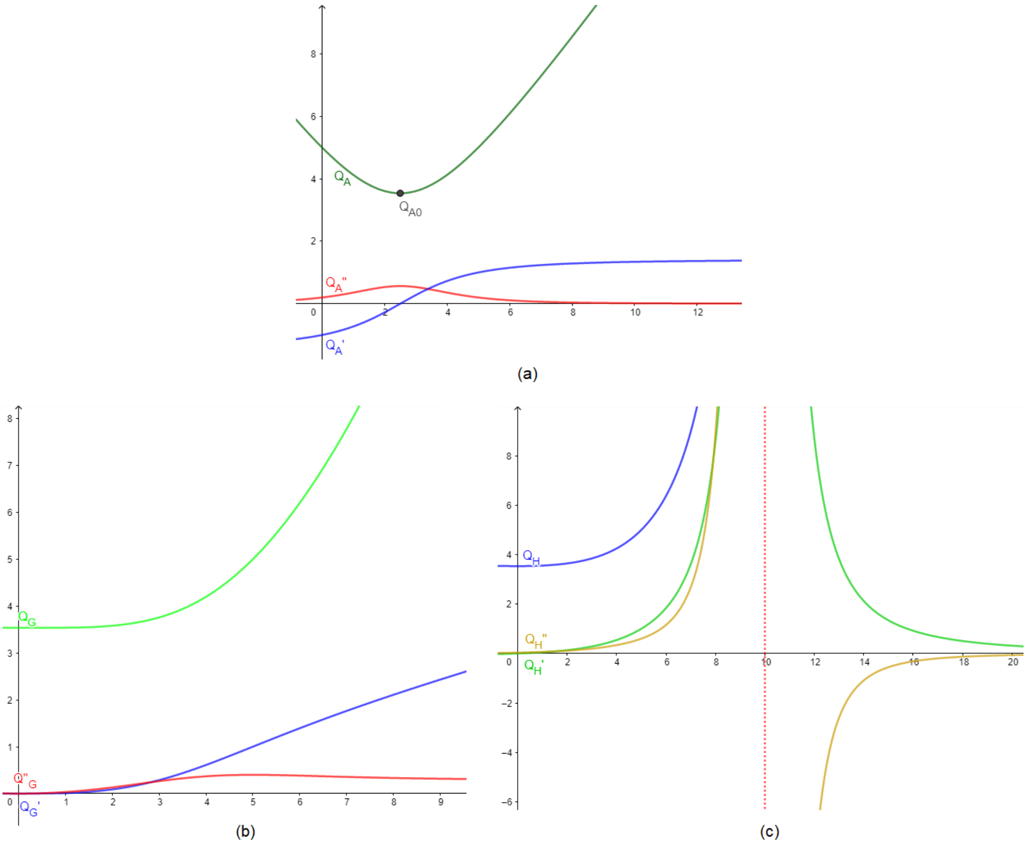

Figura 3: Funções para a constante $a = 5$ - (a) $Q(A)$, $Q^{'}(A)$ e $Q^{''}(A)$; (b) $Q(G)$, $Q^{'}(G)$ e $Q^{''}(G)$; (c) $Q(H)$, $Q^{'}(H)$ e $Q^{''}(H)$.

Agora, em se tratando da equação (2.8) no contexto geométrico que estamos adotando, se analisarmos as condições em que $2a - H > 0$ e $H^2 - 2aH + 2a^2 \geq 0$, concluímos que o domínio de $Q(H)$ é dado pelo intervalo $(0, 2a)$.

Com relação às assíntotas, como estamos considerando $Q(H)$ no domínio limitado $(0, 2a)$ não teremos assíntotas horizontais. No entanto, se desconsiderarmos a interpretação geométrica, deixando o domínio como sendo $(-\infty, 2a) \cup (2a, +\infty)$, iríamos obter duas assíntotas horizontais, a saber $Q = \pm a$. É possível constatar também que para este caso mais amplo, $H = 2a$ seria uma descontinuidade da função com assíntota vertical em $H = 2a$.

Passando para as derivadas de primeira e segunda ordem de $Q(H)$,

$$Q^{'}(H) = \frac{a^2 H}{(2a - H)^2 \sqrt{H^2 - 2aH + 2a^2}}$$

e

$$Q^{''}(H) = \frac{a^2(2H^3 - 3aH^2 + 4a^3)}{(2a-H)^3(H^2 - 2aH + 2a^2)^{\frac{3}{2}}},$$

obtém-se que $H = 0$ seria um ponto crítico de $Q(H)$ se estivéssemos sem o contexto geométrico. Agora, avaliando a expressão de $Q^{'}(H)$, em particular o termo a^2H pois $(2a - H)^2\sqrt{H^2 - 2aH + 2a^2} \geq 0$, temos que $Q^{'}(H) > 0$ em $(0, 2a)$ e, portanto, $Q(H)$ é crescente neste intervalo. No caso mais geral, sem a interpretação geométrica, $H = 0$ é um ponto de mínimo de $Q(H)$, com esta função decrescente em $(-\infty, 0)$ e crescente em $(0, 2a) \cup (2a, +\infty)$. Por fim, como a expressão $2H^3 - 3aH^2 + 4a^3 > 0$ em $(0, 2a)$, concluímos que Q possui concavidade voltada para cima neste domínio.

Na Figura 3(c) podemos observar as características e propriedades discutidas, no caso específico para $a = 5$.

4 A FAMÍLIA DE FUNÇÕES A

Para a família de equações (2.9), (2.10) e (2.11) que relaciona a média aritmética em função das médias geométrica, quadrática e harmônica, Figura 2(b), uma análise algébrica semelhante pode ser realizada.

O domínio da função $A(G)$, por se tratar de uma função quadrática, seria toda a reta real, no entanto, como estamos considerando G uma média de segmentos, restringimos o domínio à semirreta positiva $(0, +\infty)$. Para as demais funções, é suficiente analisar as inequações $2Q^2 - a^2 \geq 0$ e $2a - H > 0$. Na primeira, temos como raíz real $Q = \pm\frac{a^2}{2}$ e observando que o coeficiente da variável quadrática da equação $2Q^2 - a^2 = 0$ é positivo, a inequação acima se verifica na reunião de intervalos $(-\infty, -\frac{a\sqrt{2}}{2}] \cup [\frac{a\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ e, portanto, pela representação geométrica do problema, o domínio de $A(Q)$ é dado por $[\frac{a\sqrt{2}}{2}, +\infty)$. Para a segunda, analogamente a seção anterior, obtemos $(0, 2a)$ como domínio para $A(H)$.

Com relação as assíntotas horizontais, como $A(H)$ possui um domínio limitado, não possui assíntotas horizontais. Agora, quando $G \to +\infty$ e $Q \to +\infty$, é fácil ver que $A(G)$ e $A(Q)$ tendem ao infinito, de modo que $A(G)$ e $A(Q)$ também não possuem assíntotas horizontais. Se pensarmos no caso mais amplo, sem a interpretação geométrica, e deixarmos G e A tenderem ao infinito negativo, continuaremos não obtendo assíntotas verticais já que, neste caso, $A(G)$ e $A(Q)$ tendem ao infinito positivo. Para $A(H)$, no entanto, se desconsiderarmos o domínio limitado e estendermos para $(-\infty, 2a) \cup (2a, \infty)$, obtemos uma assintota horizontal $A = 0$.

No que diz respeito a existência de assíntotas verticais, como (2.9) é uma função polinomial, claramente não possui esse tipo de assíntota. Em se tratando de (2.10), como ela é uma função contínua no domínio considerado e definida no extremo inferior $Q = \frac{a^2}{2}$ também não possuirá assíntotas verticais. Já para a função (2.11), podemos observar que há uma descontinuidade em $H = 2a$ e, que, quando tomamos H suficientemente próximo à esquerda do valor $2a$, essa função tende ao infinito positivo, ou seja, (2.11) possui uma assíntota vertical dada pela reta $H = 2a$.

Passamos agora a verificar o comportamento das relações em questão. Derivando duas vezes $A(G)$, obtemos

$$A^{'}(G) = \frac{G}{a} \quad e \quad A^{''}(G) = \frac{1}{a}.$$

Analisando as expressões acima, vemos que $G = 0$ seria um ponto crítico de $A(G)$ sem a interpretação geométrica, com $A(G)$ estritamente positivo e estritamente negativo a direita e a esquerda de zero, respectivamente. Isso nos remete a $A(G)$ crescente em $(0,+\infty)$ e decrescente em $(-\infty,0)$.

Além disso, como a é a medida de um segmento, o teste da segunda derivada confirmaria que $G = 0$ é o ponto de mínimo da função $A(G)$ caso estivéssemos considerando todo o domínio real. Ainda, analisando a expressão de $A^{''}(G)$, percebemos que $A^{''}(G) > 0$ para quaisquer valores de G e, portanto, a concavidade de (2.9) é voltada para cima.

Para (2.10), a regra da cadeia nos dá as seguintes derivadas de primeira e segunda ordem

$$A^{'}(Q) = \frac{Q}{\sqrt{2Q^2 - a}} \quad e \quad A^{''}(Q) = -\frac{a^2}{(2Q^2 - a)^{\frac{3}{2}}}.$$

Então, analisando a expressão acima, percebemos que $A^{'}(Q)$ não existe quando $2Q^2 - a \leq 0$. No entanto, considerando o domínio de (2.10), é suficiente considerar quando $2Q^2 - a \leq 0$, ou seja, $A^{'}(Q)$ não existe quando $Q = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Logo $Q = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ é ponto crítico da equação (2.10). Além disso, como $a > 0$, a equação $A^{'}(Q) = 0$ não possui solução, o que implica que $Q = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ é o único ponto crítico de (2.10).

Agora, $A^{'}(Q) > 0 \Leftrightarrow Q > 0$, portanto, como $Q \geq \frac{a\sqrt{2}}{2}$ segue que $A^{'}(Q) > 0$ e, assim, (2.10) crescente em todo o domínio $[\frac{a\sqrt{2}}{2}, +\infty)$, com valor mínimo $A(\frac{a\sqrt{2}}{2}) = \frac{a}{2}$ (A_{Q0} na Figura 4(b)). Já avaliando o sinal de $A^{''}(Q)$ observa-se que $A^{''}(Q) < 0$ para todo o domínio, e portanto a concavidade de (2.10) é voltada para baixo.

Passando a buscar os pontos críticos e estudar o comportamento da equação (2.11) temos como primeira e segunda derivadas respectivamente,

$$A^{'}(H) = \frac{a^2}{\sqrt{(2a - H)^2}} \quad e \quad A^{''}(H) = \frac{2a^2}{\sqrt{(2a - H)^3}}.$$

Dessas equações, percebemos que $A^{'}(H)$ nunca se anula, seja qual for o valor de $H \neq 2a$. Além disso, $A^{'}(H)$ não existe para $H = 2a$ como já observamos para (2.11). Porém, como $H = 2a$ é uma assíntota vertical de (2.11), não está no seu domínio, logo, não temos pontos críticos para (2.11).

Com relação ao crescimento e decrescimento da função (2.11), além de $A^{'}(H)$ não se anular, a sua espressão nos dá que ela é estritamente positiva e, portanto, (2.11) é sempre crescente. Agora, com relação a concavidade da função (2.11), analisando o sinal da sua segunda derivada podemos concluir que $A^{''}(H) > 0$ quando $H < 2a$ e $A^{''}(H) < 0$ quando $H > 2a$, ou seja, (2.11) possui concavidade voltada para cima no intervalo $(-\infty, 2a)$ e voltada para baixo no intervalo $(2a, +\infty)$. No entanto, como A e H representam as médias aritmética e harmônica, respectivamente, o domínio que estamos considerando é o intervalo $(0,2a)$ e, neste caso, (2.11) possui apenas concavidade volada para cima.

Na Figura 4 podemos observar as características e propriedades discutidas, no caso específico para $a = 5$, ou através da geometria dinâmica com diferentes valores de a, disponível no link `https://www.geogebra.org/classic/dgh8652z`.

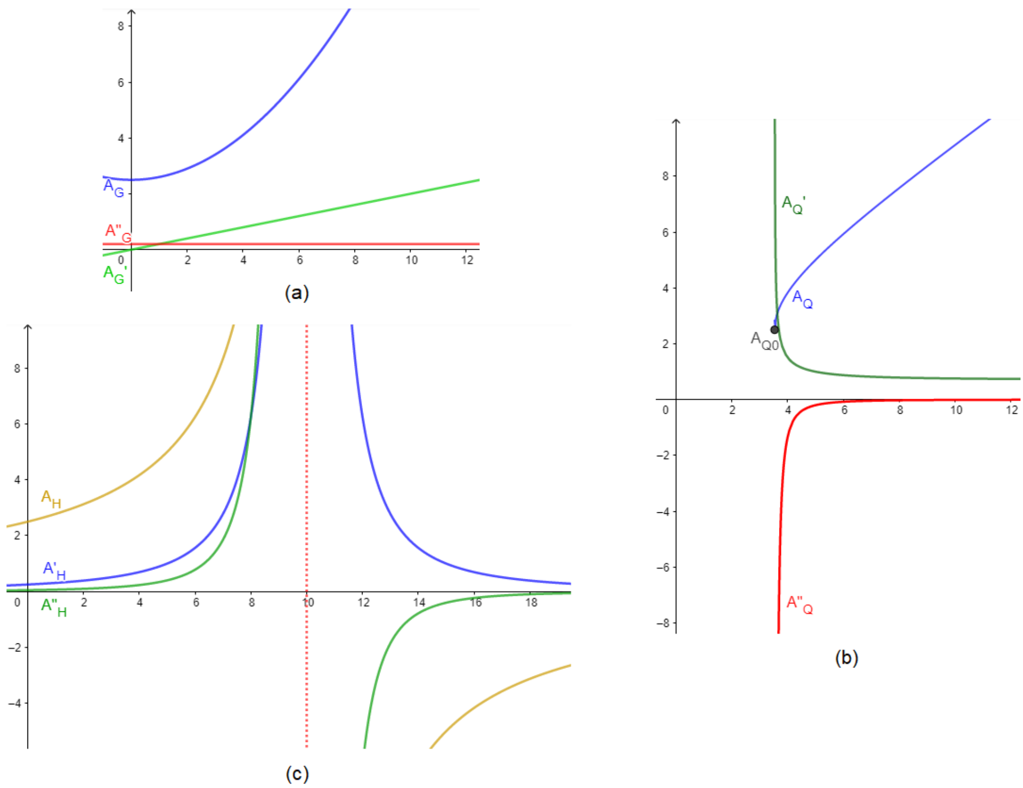

Figura 4: Funções para a constante $a = 5$ - (a) $A(G)$, $A^{'}(G)$ e $A^{''}(G)$; (b) $A(Q)$, $A^{'}(Q)$ e $A^{''}(Q)$; (c) $A(H)$, $A^{'}(H)$ e $A^{''}(H)$.

5 A FAMÍLIA DE FUNÇÕES G

Considerando as equações (2.12), (2.13) e (2.14), Figura 2 (c), verificamos que as inequações $2aA - a^2 \geq 0$, $2Q^2 - a^2 \geq 0$ e $\frac{a^2 H}{2a-H} \geq 0$ são satisfeitas para $A \in [\frac{a}{2}, +\infty)$, $Q \in (-\infty, \frac{-a\sqrt{2}}{2}] \cup [\frac{a\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ e $H \in [0,2a)$. Dessa forma, considerando que estamos tratando de médias entre segmentos, restringimos os domínios das funções em (2.12), (2.13) e (2.14) por $(\frac{a}{2}, +\infty)$, $[\frac{a\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ e $(0,2a)$, respectivamente.

Passando à analisar o comportamento assintótico destas expressões, verificamos que (2.12) e (2.13) não possuem assíntotas horizontais e nem verticais, já que $G(A), G(Q) \to +\infty$, quando $A, Q \to +\infty$, e tanto $G(A)$ quanto $G(Q)$ são contínuas no domínio considerado. Para (2.14), considerando a descontinuidade no ponto $2a$ e calculando o limite lateral a esquerda, temos que $G(H) \to +\infty$ e, portanto, $H = 2a$ é uma assíntota vertical. Além disso, lembrando que estamos em um domínio limitado para $G(H)$, não possuímos assíntota horizontal, conforme Figura 5(c).

Agora, derivando duas vezes a equação (2.12), obtém-se

$$G^{'}(A) = \frac{\sqrt{2aA - a^2}}{2A - a} \quad e \quad G^{''}(A) = -\frac{\sqrt{2aA - a^2}}{(2A - a)^2}.$$

Note que não é possível resolver a equação $G^{'}(A) = 0$ e não existe $G^{'}(A)$ no ponto $A = \frac{a}{2}$. Se estivéssemos sem a interpretação geométrica, este seria o ponto crítico da função $G(A)$ e candidato a máximo ou mínimo local. Contudo, é fácil verificar que $G^{'}(A) > 0$ para $A \in (\frac{a}{2}, +\infty)$ e, portanto, $G(A)$ é crescente em todo o seu domínio. Agora, se observarmmos a expressão de $G^{''}(A)$, ela é composta de um sinal negativo e de uma fração em que seus membros são sempre positivos, então concluímos que $G^{''}(A) < 0$ e, consequentemente, a concavidade de $G(A)$ é voltada para baixo.

Da mesma forma, derivando duas vezes a expressão de $G(Q)$ na equação (2.13), temos

$$G^{'}(Q) = \frac{\sqrt{a}Q}{(2Q^2 - a^2)^{\frac{3}{4}}} \quad e \quad G^{''}(Q) = -\frac{\sqrt{a}(Q^2 + a^2)}{(2Q^2 - a^2)^{\frac{7}{4}}}.$$

Como $2Q^2 - a^2 = 0$ em $Q = \pm\frac{a\sqrt{2}}{2}$ e $Q \neq 0$, pois Q é a média quadrática entre comprimentos de segmentos, vemos que $Q = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ é ponto crítico para $G(Q)$. Além disso, como $G^{'}(Q)$ é sempre positivo neste caso, $G(Q)$ é crescence em $[\frac{a\sqrt{2}}{2}, +\infty)$. Assim, $Q = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ é ponto de mínimo de $G(Q)$. Se tivéssemos no caso mais geral, seria possível concluir que $G(Q)$ é descrecente em $(-\infty, -\frac{a\sqrt{2}}{2}]$ e $Q = -\frac{a\sqrt{2}}{2}$ também seria um ponto de mínimo para a função $G(Q)$.

Para finalizar esta seção, resta analisar as derivadas de ordem dois da função $G(H)$ definida em (2.14),

$$G^{'}(H) = \frac{a^2}{\sqrt{H}(2a - H)^{\frac{3}{2}}} \quad e \quad G^{''}(H) = \frac{a^2(2H - a)}{H^{\frac{3}{2}}(2a - H)^{\frac{5}{2}}}.$$

Então, analisando $G^{'}(H)$ descrita acima, verificamos que o numerador nunca se anula, seja qual for o valor de H no domínio de $G(H)$. Além disso, $G^{'}(H)$ não existe para $H = 0$ e $H = 2a$ como já observado. Logo, não temos pontos críticos para $G(H)$. Com relação ao crescimento e decrescimento da função $G(H)$, temos, como $a^2 > 0$, que $G^{'}(H)$ é sempre positivo e, portanto, $G(H)$ é crescente em todo o domínio. Com relação a concavidade, ao verificar o sinal de $G^{''}(H)$, é suficiente verificar o sinal do termo $2H - a$ pois $H \in (0, 2a)$. Assim, $G^{''}(H) > 0$ para $H > \frac{a}{2}$ e $G^{''}(H) < 0$ para $H < \frac{a}{2}$ e, portanto, $H = \frac{a}{2}$ é um ponto de inflexão para $G(H)$ que possui concavidade voltada para baixo em $(0, \frac{a}{2})$ e voltada para cima em $(\frac{a}{2}, 2a)$.

Na Figura 5 podemos observar as características e propriedades discutidas, no caso específico para $a = 5$, ou através da geometria dinâmica com diferentes valores de a, disponível no link `https://www.geogebra.org/classic/jjhghvwu`.

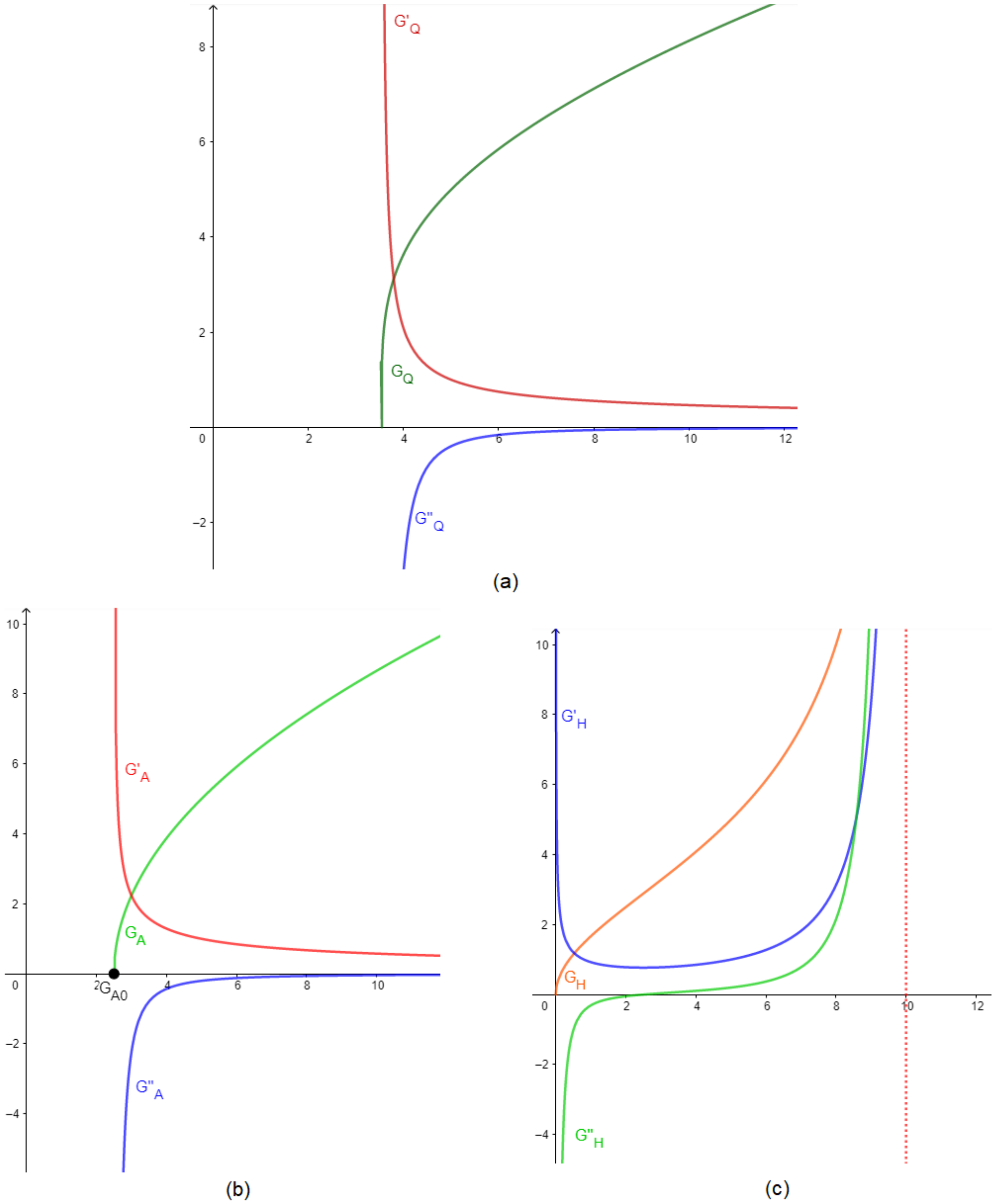

Figura 5: Funções para a constante $a = 5$ - (a) $G(Q)$, $G^{'}(Q)$ e $G^{''}(Q)$; (b) $G(A)$, $G^{'}(A)$ e $G^{''}(A)$; (c) $G(H)$, $G^{'}(H)$ e $G^{''}(H)$.

6 A FAMÍLIA DE FUNÇÕES H

Para finalizar, abordaremos a última família de funções, equações (2.15), (2.16) e (2.17), dada pela média harmônica em função das médias aritmética, geométrica e quadrática, obtita do semicírculo a partir de relações trigonométricas do triângulo retângulo.

Em se tratando das funções em (2.15) e (2.16), podemos observar que ambas são funções racionais e, portanto, após uma análise do sinal dos polinômios $g(A) = -a^2 + 2aA$ e $p(G) = a^2 + G^2$, considerando $A, G > 0$ devido a interpretação geométrica, obtemos como domínio de $H(A)$ e $H(G)$ os intervalos $(\frac{a}{2}, +\infty)$ e $(0, +\infty)$, respectivamente. Por outro lado, para $H(Q)$ dado pela equação (2.17) devemos analisar as condições em que $2Q^2 - a^2 \geq 0$ e $a + \sqrt{2Q^2 - a^2} \neq 0$. Assim, buscando as raízes da equação $2Q^2 - a^2 = 0$, vemos que $Q = \pm\sqrt{\frac{a^2}{2}}$. Agora, observando que o coeficiente da variável quadrática da equação é positivo, a inequação $2Q^2 - a^2 \geq 0$ se verifica na reunião de intervalos $(-\infty, \frac{-a\sqrt{2}}{2}] \cup [\frac{a\sqrt{2}}{2}, +\infty)$. Além disso, analisando essa restrição que acabamos de obter, juntamente com o fato de a ser a medida de um segmento, isto é $a > 0$, resulta que $a + \sqrt{2Q^2 - a^2} \geq 0$ e, consequentemente, esta reunião de intervalos é a condição de existência de $H(Q)$. Portanto, como Q representa uma média quadrática entre segmentos, assumimos como domínio o intervalo $[\frac{a\sqrt{2}}{2}, +\infty)$.

Quanto as assíntotas horizontais, fazendo $A, G, Q \to +\infty$ e manipulando as expressões em (2.15), (2.16) e (2.17) concluimos que $H(A)$ e $H(Q)$ possuem a mesma assíntota horizontal $H = 2a$ dependente da medida de segmento a, enquanto que a assíntota horizontal para $H(G)$, é $H = 2$ independente de a. Agora, analisando as expressões em (2.15), (2.16) e (2.17), juntamente com os domínios obtidos, temos que $H(A)$ é contínua em um domínio limitado, $H(G)$ é uma função racional com denominador não nulo em toda semirreta positiva e $H(Q)$ é contínua e definida no seu extremo inferior, portanto não possuem assíntotas verticais.

Em se tratando de pontos críticos, derivando duas vezes as expressões de $H(A)$ e $H(G)$, temos

$$H^{'}(A) = \frac{a^2}{A^2} \quad e \quad H^{''}(A) = -\frac{2a^2}{A^3},$$

$$H^{'}(G) = \frac{4Ga^2}{(a^2+G^2)^2} \quad e \quad H^{''}(G) = \frac{4a^2(a^2-3G^2)}{(a^2+G^2)^3}.$$

Então, como $H^{'}(A)$ e $H^{'}(G)$ são contínuas e não se anulam no domínio considerado, não possuem pontos críticos. Por outro lado, $H(Q)$ possui as seguintes derivadas de primeira e segunda ordem, respectivamente,

$$H^{'}(Q) = \frac{4a^2Q}{\sqrt{2Q^2-a^2}(a+\sqrt{2Q^2-a^2})^2}$$

e

$$H^{''}(Q) = -\frac{4a^2(a^3+a^2\sqrt{2Q^2-a^2}+4Q^2\sqrt{2Q^2-a^2})}{(2Q^2-a^2)^{\frac{3}{2}}(a+\sqrt{2Q^2-a^2})^3}.$$

Então, analisando a equação $H^{'}(Q) = 0$ vemos que ela não possui solução já que estamos considerando $Q \geq \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Além disso, como vimos anteriormente, $a + \sqrt{2Q^2 - a^2} \neq 0$ e $\sqrt{2Q^2 - a^2} \geq 0$, portanto, $H^{'}(Q)$ não existe quando $Q = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, ponto crítico da equação (2.17).

Utilizando as expressões de segunda derivada, podemos concluir que no domínio considerado, $H^{''}(A) < 0$ e, portanto, $H(A)$ possui concavidade voltada para baixo. Para $H(G)$ é suficiente analisar o sinal da expressão $a^2 - 3G^2$, que nos remete ao ponto de inflexão $G = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, tendo $H(G)$ concavidade voltada para cima à esquerda, e voltada para baixo à direita desse ponto. Finalmente, ao analisarmos $H^{''}(Q)$ no domínio considerado, temos que o termo $2Q^2 - a^2$ é positivo, mas com o sinal negativo da expressão, obtemos concavidade voltada para baixo.

Na Figura 6 podemos observar as características e propriedades discutidas, no caso específico para $a = 5$, ou através da geometria dinâmica com diferentes valores de a, disponível no link `https://www.geogebra.org/classic/yjs68yh7`.

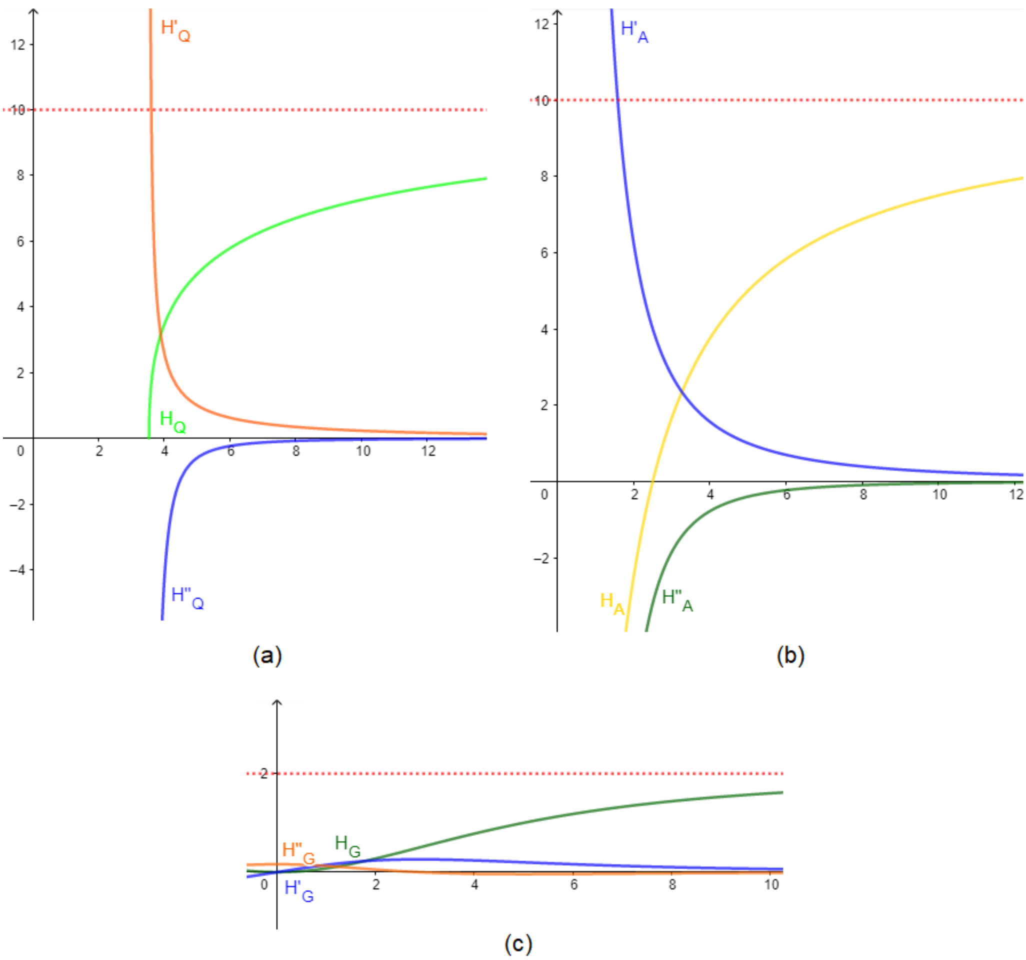

Figura 6: Funções para a constante $a = 5$ - (a) $H(Q)$, $H^{'}(Q)$ e $H^{''}(Q)$; (b) $H(A)$, $H^{'}(A)$ e $H^{''}(A)$; (c) $H(G)$, $H^{'}(G)$ e $H^{''}(G)$.

7 CONCLUSÃO E DISCUSSÃO

Como conclusão deste trabalho é possível ressaltar algumas peculiaridades envolvendo as diferentes médias no contexto geométrico apresentado. Pode-se observar que quando são relacionadas as médias aritmética e quadrática, obtemos expressões matemáticas mais simples de se trabalhar e, por sua vez, expressões gráficas de menor complexidade. Por outro lado, quando trabalhamos com as médias geométrica e harmônica, observa-se a ocorrência de assíntotas verticais ou horizontais, bem como expressões mais interessantes se pensarmos na análise de pontos críticos ou de inflexão através dos cálculos de primeira e segunda derivada.

Das médias quadráticas, quando a variável é a média aritmética temos uma função raiz com o radicando polinomial quadrático, apresentando concavidade voltada para cima e um ponto de mínimo. No caso da variável média geométrica, a função também é raiz, mas agora com radicando polinomial de quarto grau, apresentando concavidade voltada para cima. Já para a variável média harmônica temos uma função dada por um quociente, onde o numerador é uma raiz com radicando polinomial quadrático e o denominador é polinomial de grau um. Nesta última, apresenta-se uma assíntota vertical no extremo superior do domínio.

Considerando as médias aritméticas, quando a variável é a média geométrica temos uma função polinomial quadrática com concavidade voltada para cima. No caso da variável média quadrática, a função é raiz com radicando polinomial quadrá-tico, apresentando concavidade voltada para baixo e assume um valor mínimo no extremo inferior do domínio. Já para a variável média harmônica temos uma função racional com um quociente linear, onde apresenta uma assíntota vertical no extremo superior do domínio.

Das médias geométricas, quando a variável é a média quadrática, temos uma função raíz com índice quatro e radicando sendo uma função polinomial quadrática. Essa média geométrica, apresenta concavidade voltada para baixo. No caso da variável média aritmética, a função também é raiz, mas agora com índice dois, mantendo um radicando como sendo um polinômio quadrático e apresentando concavidade voltada para baixo. Já para a variável média harmônica temos uma função dada por uma raiz onde o radicando é um quociente, de numerador quadrático e denominador linear. Nesta última, apresenta-se um ponto de inflexão separando as concavidades contrárias, além de uma assíntota vertical no extremo superior do domínio.

Finalmente, em se tratando das médias harmônicas, quando posta em função da média quadrática, temos uma função com um quociente, onde tanto o numerador quanto o denominador apresentam uma raiz com radicando sendo uma função polinomial quadrática. Essa média apresenta uma assíntota horizontal e concavidade voltada para baixo. No caso da variável média aritmética, a função é racional com denominar linear, apresentando concavidade voltada para baixo e uma assíntota horizontal. Já para a variável média geométrica temos uma função racional de numerador e denominador quadrático. Nesta última, apresenta-se um ponto de inflexão separando as concavidades contrárias, além de uma assíntota horizontal $y = 2$, independente do segmento a, o que não ocorre em nenhum dos outros casos para esta ou outra das médias trabalhadas.

ABSTRACT. This paper aims to explore solutions that represent dependency relationships between geometric quantities, aiming not only to determine unusual associations between geometry and algebra, but also to develop learning objects with Dynamic Geometry. In this context, solutions that relate geometric quantities of the triangle and the semicircle are analyzed, establishing relationships between the arithmetic, geometric, harmonic and quadratic means, with the aim of understanding the characteristics and trigonometric properties, examining polynomials and their roots, as well as addressing the geometry in a computational and dynamic way.

Keywords: geometric quantities, means, functions.

REFERÊNCIAS

[1] C.B. Boyer & U.C. Merzach. "História da Matemática". Prefacio de Isaac Asimov, Tradução de Helena Castro. Editora Blucher, São Paulo, 3 ed. (2012).

[2] A.G. de Oliveira. "Funções e geometria: o uso de ambiente de geometria dinâmica como subsídio para a caracterização das funções quadráticas". Master's thesis, UTFPR, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, PR (2013).

[3] Euclides. "Os Elementos". Tradução e introdução de Irineu Bicudo. Editora UNESP, São Paulo (2009).

[4] L.S. Ferreira. "Uma Abordagem Sobre Médias e Suas Aplicações no Ensino Médio". Master's thesis, UNIFAP, Universidade Federal do Amapá, Macapá, AP (2017).

[5] V. Giraldo, F.R. Mattos & P.A. Caetano. "Recursos Computacionais no Ensino de Matemática". Coleção PROFMAT. SBM (2013).

[6] R.M. Pavanello. "O Abandono do Ensino de Geometria: uma Visão Histórica". Master's thesis, UNICAMP, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP (1989).

How to cite

R.S. Parolin, G.C. Irala & A. Darós. Existência e Comportamento de Funções Média do Semicírculo. *Trends in Computational and Applied Mathematics*, **25**(2024), e01717. doi: 10.5540/tcam.2024.025.e01717.