

Desacoplamento e Controle LQR com Formulação LMI para Sistemas MIMO

V. G. SILVA¹ e J. V. DA FONSECA NETO^{2*}

Recebido em 14 de outubro de 2021 / Aceito em 21 de junho de 2023

RESUMO. O problema tratado é o desacoplamento de um sistema MIMO, com o número de entradas igual ao de saídas, bem como o controle ótimo desse sistema após o seu desacoplamento. Numa primeira etapa define-se uma estrutura de compensador para o sistema MIMO, que permite tornar cada saída dependente de uma única entrada. Para o sistema desacoplado propõe-se a aplicação de uma lei de controle por realimentação de saídas, onde a matriz de ganho de realimentação é determinada via otimização de um índice de desempenho definido como uma função de custo quadrática. O método de controle é baseado em LQR, através do qual adapta-se uma formulação LMI.

Palavras-chave: desacoplamento de sistemas MIMO, controle ótimo, regulador linear quadrático (LQR), desigualdades matriciais lineares (LMI), realimentação de saídas.

1 INTRODUÇÃO

Da teoria básica de controle constata-se que, para uma parcela significativa de problemas, os modelos de *sistemas dinâmicos lineares de tempo contínuo* são usados, com boa aproximação, para representar a dinâmica da planta, permitindo assim o uso de métodos de análise e de projeto visando obter o sistema de controle desejado [4, 5, 7, 11, 12]. A estrutura geral para representar, o mais aproximadamente possível, a dinâmica do sistema de malha fechada pode ser obtida por meio de técnicas de análise/modelagem, tais como: diagramas de blocos/função de transferência, diagrama de fluxo de sinais e modelo no espaço de estados. Uma subclasse dos sistemas dinâmicos lineares de tempo contínuo é a de *sistemas de entrada única e saída única* (*Single Input Single Output - SISO Systems*, em inglês), que podem ser identificados em aplicações presentes em vários setores da sociedade como por exemplo em controle de: *i*) nível de líquido de um tanque, *ii*) de posição ou velocidade do eixo de um motor e *iii*) da temperatura de uma dada planta ou sistema térmico. Note que tais exemplos são gerais, cada um dos quais podendo

*Corresponding author: João Viana Fonseca Neto – E-mail: joao.fonseca@ufma.br

¹Universidade Federal do Maranhão - UFMA, Departamento de Engenharia Elétrica, MA, Brasil – E-mail: vilemar.gomes@ufma.br <https://orcid.org/0009-0005-0945-3000>

²Universidade Federal do Maranhão - UFMA, Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica, MA, Brasil – E-mail: joao.fonseca@ufma.br <http://orcid.org/0000-0003-4606-7510>

aparecer numa variedade de aplicações particulares. Para outra subclasse de sistemas dinâmicos lineares, estes possuem duas ou mais entradas e duas ou mais saídas, sendo por isto identificados como *sistemas de entradas múltiplas e saídas múltiplas (Multi Input, Multi Output - MIMO Systems*, em inglês).

Os sistemas de controle MIMO podem ser vistos em aplicações mais complexas, presentes em diversos setores da sociedade tais como: hoteleiro, hospitalar, aeronáutico, bancário e empreendimentos em geral. Alguns exemplos desta classe de sistemas são: *iv*) chuveiro com válvulas separadas para água fria e água quente, que permitem ao usuário encontrar o fluxo e a temperatura da água mais confortável ao seu corpo, *v*) sistemas robóticos, onde posições translacionais e rotacionais de articulações são controladas a partir de motores de passo e *vi*) uma pequena aeronave, onde sua velocidade, altitude, direção e outras variáveis são controladas, manipulando-se manetes ou alavancas que aumentam ou diminuem a velocidade do motor, enquanto pedais são usados para controlar o leme de direção, movimentando a aeronave para a direita ou para a esquerda.

A presença de *acoplamentos* em sistemas MIMO é certamente uma de suas principais características que os diferencia dos sistemas SISO, sendo uma das motivações do presente trabalho, cuja fundamentação é introduzida na sequência. Cada uma das entradas de controle tende a afetar várias saídas ao mesmo tempo, enquanto cada saída sofre o efeito das várias entradas, também ao mesmo tempo. Esta interação entre entradas de controle e saídas de uma planta MIMO ocorre devido a conexões internas existentes naturalmente entre os subsistemas que compõem a planta. Tais conexões, chamadas de *acoplamentos*, se constituem num inconveniente considerável pois mudanças em um laço causam mudanças em outro laço, podendo afetar sua estabilidade e dificultar o controle de todas as variáveis de saída. Neste contexto (sob determinadas hipóteses) a inclusão de um compensador, de modo tal que cada saída do sistema dependa de uma única entrada de controle, é uma alternativa para se atingir um requisito de desempenho específico de sistemas MIMO, denominado *desacoplamento* [4].

Da literatura técnico-científica citam-se alguns trabalhos destinados ao problema de desacoplamento para sistemas MIMO. O desenvolvimento de controladores para desacoplamento linear e não linear, integrados por um algoritmo de controle de comutação adaptável, são apresentados em [27]. Baseando-se nos conceitos de dinâmica não modelada virtual e modelos lineares de ordem inferior, em [27] desenvolve-se uma modelagem de dinâmica virtual para controle adaptativo de sistema multivariável não linear, com requisitos de desacoplamento. Nele investiga-se uma classe de processos industriais complexos com propriedades multivariáveis não lineares e fortemente acoplados, e propõe-se uma plataforma para o desacoplamento de sistema multivariável. Em [16] propõe-se uma formulação generalizada de desacoplamento simplificado para processos $n \times n$, que pode ser aplicada a diferentes configurações, dependendo da estrutura de um sistema chamado *desacoplador*. Após a redução do controlador, de centralizado para descentralizado, o método proposto é adaptado para o controle PID multivariável.

Em [17] mostra-se uma metodologia de projeto de um preditor de Smith multivariável para processos $n \times n$ com múltiplos atrasos de tempo, baseado em estrutura de desacoplamento direto

centralizado. Um desacoplador é introduzido no esquema de controle visando atingir um melhor desempenho. Em [18] um método de desacoplamento é proposto para uma classe de sistemas MIMO. O conceito de desacoplamento de Falb é utilizado visando obter uma lei de controle por realimentação de saídas com ação proporcional derivativo PD. Para um dado sistema MIMO linear que satisfaça certas condições (como invertibilidade à direita por exemplo) mostra-se como obter uma realimentação de estado estática que desacople o sistema. O procedimento consiste em encontrar um compensador de posto completo por coluna, tal que o requerimento de desacoplamento seja alcançado.

Quanto à técnica de controle ótimo com regulador quadrático linear (LQR), trata-se de um resultado bem consolidado da teoria de controle, o qual está fundamentado numa equação algébrica de Riccati e num critério de estabilidade de Lyapunov [1, 12]. Esta técnica consiste basicamente na utilização de uma lei de controle de realimentação de estados (ou de saídas) com vistas à otimização de uma função de custo quadrática. Na prática isto resulta numa ponderação ótima que combina: menor dispêndio de energia de controle com maior precisão das variáveis a serem controladas. É uma técnica explorada em diversos trabalhos científicos, seja como parte de dissertações de mestrado [2, 10], seja como tema exclusivo em artigos científicos [13, 19, 20, 29, 33, 35], bem como em aplicações nos setores: aeroespacial, de energia e processos químicos.

Outra ferramenta que faz parte da solução do problema tratado no presente trabalho, refere-se à formulação matemática denominada *Desigualdade Matricial Linear* (em inglês, *Linear Matrix Inequality ou LMI*). O conceito de LMI surgiu em 1892, com os critérios de estabilidade de Lyapunov para sistemas dinâmicos [1]. Entretanto, os avanços das pesquisas para resolver LMI por métodos numéricos mais eficientes, renderam resultados de maior impacto somente há 30 anos, aproximadamente, com o uso dos *algoritmos de pontos interiores*. Tais avanços possibilitaram a resolução de LMI como problema de otimização convexa, fortalecendo significativamente as pesquisas no ramo do controle robusto. Com tal abordagem, citamos alguns exemplos [6, 8, 9, 15, 31].

Aproveitando as potencialidades dessas ferramentas (LQR e LMI), encontram-se outros resultados, teóricos e aplicados, que reúnem o controle ótimo-LQR e o controle robusto-LMI, permitindo obter requisitos de robustez e otimalidade para uma mesma planta [28, 32, 36]. Pela sua importância prática, destacam-se na sequência outros trabalhos que combinam essas duas ferramentas (LQR e LMI). Em [22] a metodologia é aplicada a uma classe de sistemas mecânicos, como no controle de vibrações, considerando incertezas no modelo de um sistema de suspensão ativa, e uma falha no atuador; oscilações de vibrações mecânicas são atenuadas pela técnica proposta. Outros exemplos são os conversores de ponte ativa dupla (DAB) [36] e um sistema de energia alternativa com várias unidades fotovoltaicas, conectadas à rede de distribuição de energia elétrica convencional [34].

Pelo menos uma vantagem no uso da técnica LMI em soluções de controle ótimo-LQR pode ser evidenciada, de acordo com a comparação descrita na sequência. Do ponto de vista de espaço matricial paramétrico, uma *desigualdade matricial linear* corresponde geometricamente a uma

região maior do que a região correspondente a uma *igualdade matricial linear*. Por conseguinte, para um sistema de controle, o problema de otimização de uma função de custo quadrática, sob restrição LMI, oferece mais graus de liberdade do que o problema de otimização da mesma função objetivo, sob restrição da equação algébrica de Riccati. Por oferecer mais graus de liberdade, o controle combinando LQR com LMI pode ter impacto maior no valor ótimo da função de custo quadrática do que o controle LQR convencional.

Neste trabalho propõe-se um método de projeto de sistema de controle que permite: *i*) inicialmente o desacoplamento de uma planta MIMO quadrada (número de entradas igual ao número de saídas), que pode ser visto como uma decomposição da planta MIMO em subsistemas SISO; em seguida *ii*) o controle ótimo do sistema desacoplado, que consiste na otimização de uma função de custo quadrática por meio de uma formulação LMI, para cada subsistema SISO decorrente do desacoplamento anterior. Para a etapa *ii*) de controle, aplica-se a técnica de LQR, sob uma formulação LMI. Ademais, em toda fundamentação preliminar aos resultados, o trabalho contém uma análise comparativa: de sistemas SISO em relação a sistemas MIMO, explicitando-se diferenças estruturais importantes que refletem na diferença de complexidade de uma classe de sistemas em relação à outra, e conseqüentemente na solução de problemas de controle.

Na etapa inicial do método proposto no presente trabalho, o desacoplamento de uma planta MIMO não requer que sua matriz de transferência seja invertível. Esta é uma particularidade importante deste trabalho pois isto implica que a proposta pode ser aplicada independentemente de a planta ser ou não ser invertível, diferentemente dos trabalhos citados sobre este tema, que requer invertibilidade da planta. Outra particularidade importante é que na etapa de controle propõe-se uma formulação LMI, obtida a partir da conversão da equação algébrica de Riccati em uma LMI, usando uma manipulação algébrica e aplicando uma ferramenta algébrica denominada complemento de Schur. Como já foi mencionado nesta seção, a vantagem de se usar a técnica de otimização da função de custo quadrática sob restrição LMI, é a possibilidade de se explorar os graus de liberdade proporcionados pelas matrizes paramétricas contidas nessa LMI, uma vez que no algoritmo correspondente tais matrizes não têm seus valores fixados, pelo menos na sua totalidade.

Em resumo, salvo melhor interpretação, entende-se que a integração do desacoplamento de uma planta MIMO (evitando interações de todas as entradas de controle com todas as saídas a serem controladas) com uma etapa posterior de otimização de uma função de custo quadrática via LQR, sob uma restrição LMI (proporcionando mais graus de liberdade dos parâmetros de controle), potencializa o método de projeto, no sentido de obter boas características de estabilidade, robustez e otimalidade para sistemas dinâmicos. Nesta pesquisa, trabalhos com esta integração (Desacoplamento MIMO mais LQR e LMI) não foram encontrados na literatura técnico-científica. Um trabalho futuro visando estender estes resultados pode ser desenvolvido considerando uma entrada de referência na lei de controle ótimo-LQR.

Este trabalho está organizado conforme descrito a seguir. Nesta Seção faz-se uma contextualização do problema tratado e da solução proposta, na qual destaca-se a sua importância e citam-se alguns trabalhos relacionados. Na Seção 2, intitulada *Preliminares*, faz-se uma análise

comparativa, de sistemas de controle SISO com sistemas de controle MIMO; conceitos específicos de sistemas MIMO são destacados. Na Seção 3 o problema tratado é apresentado, o qual está desmembrado em duas etapas, distribuídas em duas subseções, respectivamente. Na Seção 4 apresenta-se uma proposta para o desacoplamento de um sistema MIMO, que consiste na introdução de um compensador, tal que cada saída do sistema compensado torna-se dependente de uma única entrada, dando origem a subsistemas SISO. Na Seção 5, apresenta-se uma proposta de otimização de um índice de desempenho quadrático baseado em LQR, para cada subsistema SISO decorrente do desacoplamento, adaptado a uma formulação LMI. Na Seção 7, um exemplo numérico, testado com auxílio do MATLAB, reforça a coerência dos resultados propostos. E na Seção 8 apresentam-se as conclusões.

2 PRELIMINARES

Nesta seção faz-se uma análise comparativa e geral entre os sistemas de controle SISO e os de controle MIMO, e uma revisão conceitual resumida de características específicas de sistemas MIMO.

2.1 Sistemas de controle SISO comparados aos de controle MIMO

Para modelagem, análise e controle de sistemas SISO existe uma variedade de conceitos, métodos ou técnicas, consolidadas em engenharia de controle. Fazem parte dessa variedade: *i*) modelagem por função de transferência, *ii*) diagrama de fluxo de sinal, *iii*) espaço de estados, *iv*) as propriedades de controlabilidade e observabilidade, *v*) a técnica de diagramas de Bode, *vi*) os critérios de estabilidade de Nyquist, *vii*) o método de lugar das raízes, *viii*) técnica de posicionamento de autoestrutura, *ix*) fórmula de Ackermann para posicionamento de pólos, *x*) controle ótimo via LQR. Embora alguns desses conceitos e métodos possam ser aplicados também à classe de sistemas MIMO, como por exemplo as propriedades de controlabilidade e observabilidade, técnica de posicionamento de autoestrutura e controle ótimo via LQR, outros não são aplicáveis, pelo menos de forma única e direta, como por exemplo o conceito de função de transferência, uma função escalar, que é insuficiente para a modelagem de um sistema MIMO, por ter este um vetor de variáveis de entrada e um vetor de variáveis de saída. Esta diferença estrutural impõe limitações que surgem na modelagem, análise e síntese de sistemas de controle com múltiplas entradas e múltiplas saídas uma vez que esses procedimentos envolvem equações e operações matemáticas com matrizes. Ao se aplicar, por exemplo, o conceito de matriz de transferência, a manipulação das equações correspondentes requer geralmente a aplicação de operações matriciais, de multiplicação (não comutável) inversão (que exige a existência da inversa), e ainda a limitação de que a operação de divisão de matriz por matriz não é possível. Por outro lado, os sistemas de controle com uma única entrada e uma única saída podem ser modelados, analisados e projetados usando o conceito de função de transferência (dentre outros conceitos e princípios), que implica em equações envolvendo escalares, cujas manipulações algébricas são comparativamente mais simples.

2.2 Desacoplamento

Conforme mencionado anteriormente, o desacoplamento de um sistema MIMO é em geral necessário para evitar dificuldades de estabilidade ou de controle de todas as variáveis de saída ao mesmo tempo. Este pode ser total ou parcial dependendo das características da planta (número de entradas igual ou diferente do número de saídas, sujeita ou não a perturbações) e das especificações de projeto. Uma vez desacoplado, o sistema MIMO torna-se equivalente a um conjunto de subsistemas, parcial ou totalmente desacoplados entre si. Para o caso de desacoplamento total de um sistema (diagonalização da sua matriz de transferência), os subsistemas dele decorrentes são SISO cujas alternativas de controle são amplamente conhecidas da teoria e aplicadas em diversificados sistemas práticos. O desacoplamento total pode ser visto como uma decomposição de um sistema MIMO em vários subsistemas SISO, cuja quantidade depende do número de saídas do sistema original MIMO [4].

2.3 Descentralização do controle e estrutura interna de sistemas MIMO

A descentralização do controlador, ou seja, a instalação de um controlador para cada subsistema componente do sistema MIMO, em vez de um único controlador central, torna-se um requisito de desempenho mais viável no projeto de controle para muitos problemas práticos. A descentralização do controle é recomendável quando há restrições inerentes ao sistema, impostas pela sua estrutura em rede distribuída, dificuldades técnicas ou econômicas, que inviabilizam a centralização do controle e a realimentação das saídas a serem controladas. Um sistema MIMO sob controle descentralizado está ilustrado pelo diagrama em blocos da Figura 1, onde S_1 , S_2 e S_3 representam os subsistemas e C_1 , C_2 e C_3 são os controladores associados, respectivamente. As ações de controle são aplicadas sobre os subsistemas, enquanto os controladores

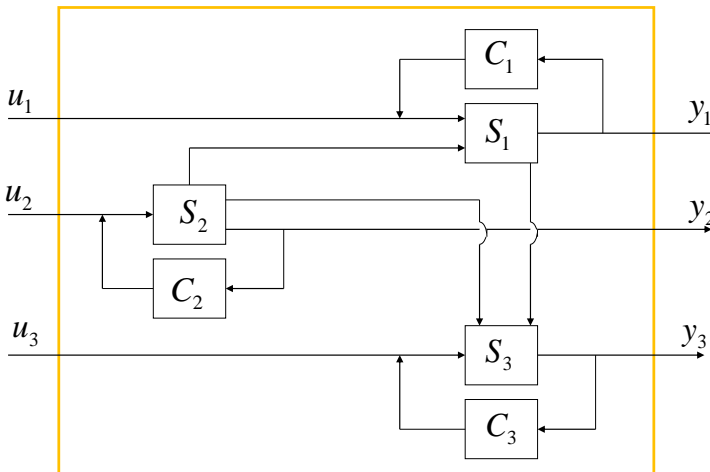


Figura 1: Sistema MIMO sob controle descentralizado.

devem atuar de forma coordenada para atingir o desempenho global desejado. A descentralização

não garante, por si só, o desacoplamento (remoção das interconexões) entre os subsistemas. No controle de sistemas de grande porte (como os Sistemas Elétricos de Potência, por exemplo) a descentralização do controle é bastante conveniente.

Uma consequência simplificadora ao se aplicar o controle completamente descentralizado para sistema MIMO é que algumas interações podem ser tratadas como uma forma de perturbação [4].

3 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O problema tratado está organizado em duas etapas. Na primeira etapa o objetivo é a determinação de um compensador para uma planta MIMO, tal que cada saída torne-se dependente de uma única entrada. Na segunda etapa busca-se determinar uma matriz de realimentação de saídas, que garanta a estabilidade do sistema de malha fechada e minimize uma função de custo quadrática sob uma restrição LMI.

3.1 Primeira etapa - Desacoplamento de Sistemas MIMO

Considerando uma planta MIMO de m entradas e m saídas, a relação entre a transformada de Laplace do vetor de saídas, $Y(s)$, e a transformada de Laplace do vetor de entradas, $U(s)$, em termo da matriz de transferência, $G_P(s)$, é dada por:

$$Y(s) = G_P(s)U(s) \quad (3.1)$$

onde:

$$U(s) = \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_m(s) \end{bmatrix}, Y(s) = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_m(s) \end{bmatrix}, G_P(s) = \begin{bmatrix} G_{p11}(s) & G_{p12}(s) & \cdots & G_{p1m}(s) \\ G_{p21}(s) & G_{p22}(s) & \cdots & G_{p2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{pm1}(s) & G_{pm2}(s) & \cdots & G_{pmm}(s) \end{bmatrix}$$

A i -ésima saída desse sistema pode ser escrita da seguinte forma:

$$Y_i(s) = G_{pii}(s)U_i(s) + \sum_{j=1}^m G_{pij}(s)U_j(s), \text{ sendo } j \neq i \quad (3.2)$$

Portanto, considerando cada saída expressa por (3.2), a planta MIMO (3.1) pode ser representada pelo diagrama em blocos da Figura 2, o qual dá uma noção física de sua estrutura. Através desse diagrama observa-se um conjunto de interconexões (acoplamentos) entre os subsistemas representados pelos elementos da matriz $G_P(s) = [G_{pij}(s)]$. A ideia de se tratar um sistema MIMO como um conjunto de subsistemas SISO pode ser vista como um caso particular da situação mais geral de representação de um sistema MIMO por um conjunto de subsistemas MIMO, com menos interações entre eles. Do sistema de equações (3.2) observa-se que cada saída $Y_i(s)$ depende não somente da entrada $U_i(s)$, como também das demais $m - 1$ entradas $U_j(s)$. Em muitas situações práticas o efeito de algumas dessas entradas em cada saída pode representar perturbações significativas.

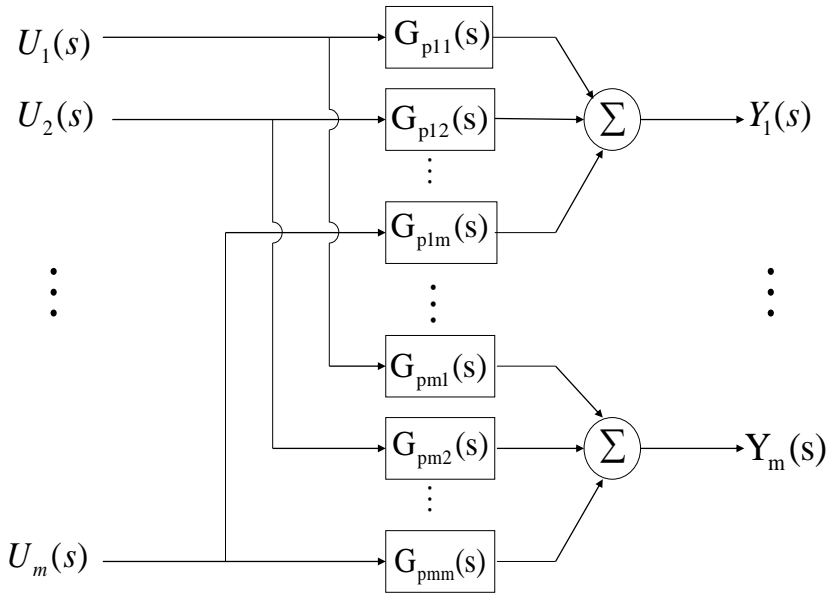


Figura 2: Estrutura de uma planta MIMO geral com m entradas e m saídas.

Neste contexto, um requisito de desempenho desejável especificamente para sistemas MIMO é o desacoplamento, que corresponde à situação de funcionamento na qual cada saída depende de uma única entrada (desacoplamento total - diagonalização do sistema). Um dos problemas tratados neste trabalho consiste basicamente em propor hipóteses tais que, para uma dada planta MIMO, obtenha-se um compensador que permita viabilizar o desacoplamento total da planta, bem como ajustar sua resposta, multivariável, por meio de uma escolha adequada de polos para o sistema desacoplado. Uma formulação matemática para este problema consiste em determinar um compensador, de matriz de transferência $G_C(s)$, a ser conectado a uma dada planta MIMO, de matriz de transferência $G_P(s)$, tal que o sistema compensado assume a forma

$$Y(s) = G_D(s)U(s) \tag{3.3}$$

onde $G_D(s)$ é a matriz de transferência desejada para o sistema, a qual tem a forma diagonal

$$G_D(s) = \begin{bmatrix} G_{d1}(s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & G_{d2}(s) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & G_{dm}(s) \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

Portanto, a i -ésima saída do sistema (3.3) pode ser escrita da seguinte forma:

$$Y_i(s) = G_{di}(s)U_i(s), \text{ com } i = 1, \dots, m \tag{3.5}$$

Note que enquanto cada saída do sistema original, expressa por (3.2), depende de todas as entradas, cada saída do sistema desacoplado, expressa por (3.5), depende de uma única entrada.

3.2 Segunda etapa - Controle ótimo com base em LQR

Devido a dificuldades de solução numérica para o controle centralizado sobre o sistema (3.3), aplica-se um controle descentralizado a cada subsistema SISO (3.5). Uma vez que a técnica de controle ótimo baseada em LQR é aplicável para modelos no espaço de estados, cada um dos m subsistemas SISO (3.5) deve ser convertido preliminarmente para o seu equivalente no espaço de estados, adquirindo a forma geral

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= A_i x_i(t) + B_i u_i(t) \\ y_i(t) &= C_i x_i(t) + D_i u_i(t) \end{aligned} \tag{3.6}$$

na qual $x_i(t) \in \mathfrak{R}^{n_i}$, $u_i(t) \in \mathfrak{R}$ e $y_i(t) \in \mathfrak{R}$ representam, nesta ordem, o vetor de variáveis de estado, a entrada de controle e a saída medida. As matrizes A_i , B_i , C_i e D_i possuem dimensões compatíveis com o subsistema (3.6).

Hipótese. Assume-se que o sistema (3.6), com $D_i = 0$, satisfaz a condição de controlabilidade de saída, que é

$$\text{posto} \left(\begin{bmatrix} (C_i B_i)^T \\ (C_i A_i B_i)^T \\ (C_i A_i^2 B_i)^T \\ \vdots \\ (C_i A_i^{n-1} B_i)^T \end{bmatrix} \right) = 1 \tag{3.7}$$

Considerando uma lei de controle de realimentação de saída $u_i(t) = -K_i y_i(t)$ aplicada ao subsistema (3.6), obtém-se o subsistema de malha fechada correspondente, dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= (A_i - B_i K_i C_i) x_i(t) \\ y_i(t) &= C_i x_i(t) \end{aligned} \tag{3.8}$$

no qual o escalar K_i representa o ganho do controlador. O problema de controle tratado é determinar um escalar K_i ótimo para cada sistema (3.6) tal que cada subsistema de malha fechada correspondente (3.8) seja estável e o seguinte índice de desempenho quadrático J_i seja mínimo

$$J_i = \int_0^\infty [y_i^T(t) Q_i y_i(t) + u_i^T(t) R_i u_i(t)] dt \tag{3.9}$$

sob a restrição LMI

$$\begin{bmatrix} A_i^T P_i + P_i A_i & P_i B_i \\ B_i^T P_i & R_i \end{bmatrix} < 0 \tag{3.10}$$

sendo $P_i = P_i^T > 0$, $Q_i = Q_i^T > 0$, $C_i^T C_i > 0$ e $R_i = R_i^T$, com P_i , Q_i e R_i não singulares.

O escalar K_i é tal que $R_i K_i C_i = B_i^T P_i$, sendo C_i de posto 1; e o índice de desempenho definido em (3.9) é particularmente equivalente a $J_i = x_o^T P_i x_o$, sendo x_o o vetor de estados no instante inicial; enquanto a formulação LMI (3.10) é obtida de uma equação algébrica de Riccati. A referida formulação pode ser obtida com base na teoria de controle linear ótimo quadrático, e em particular aplicando-se uma manipulação algébrica, juntamente com o complemento de Schur, conforme detalhamento contido na Seção 5.

4 DESACOPLAMENTO DE UMA PLANTA MIMO

Nesta seção apresentam-se hipóteses que permitem o desacoplamento, com a livre escolha de polos, para uma planta MIMO, aplicáveis como etapa preliminar ao controle ótimo abordado na Seção 5. Esta ideia está formalizada através do teorema seguinte.

Teorema 1. *Para uma planta MIMO com matriz de transferência $G_P(s) = [G_{pij}(s)]$, m por m , representada pelo modelo em diagrama de blocos da Figura 2, existe um compensador a ser conectado de maneira tal que o sistema resultante assume a forma diagonal desejada*

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_m(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{d1}(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & G_{d2}(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & G_{dm}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_m(s) \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

se a matriz de transferência do compensador, $G_C(s) = [G_{cij}(s)]$, m por m , é uma matriz cujos elementos satisfazem a condição

$$G_{cij}(s) = \begin{cases} G_{di}(s) - G_{pij}(s) & \text{para } i = j \\ -G_{pij}(s) & \text{para } i \neq j \end{cases} \tag{4.2}$$

onde as funções de transferência $G_{di}(s)$ são os elementos da diagonal principal da matriz de transferência do sistema resultante (4.1).

Prova. Sem perda de generalidade, para uma planta MIMO de 2 entradas e 2 saídas, com matriz de transferência $G_P(s) = [G_{pij}(s)]$, considere um compensador de mesma ordem, com matriz de transferência $G_C(s) = [G_{cij}(s)]$, cuja entrada é conectada à entrada da planta, e cuja saída é injetada na planta, segundo um esquema feedforward equivalente ao diagrama em blocos da Figura 3. Desta forma, as variáveis de saída do sistema resultante são expressas por

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= [G_{c11}(s) + G_{p11}(s)]U_1(s) + [G_{c12}(s) + G_{p12}(s)]U_2(s) \\ Y_2(s) &= [G_{c21}(s) + G_{p21}(s)]U_1(s) + [G_{c22}(s) + G_{p22}(s)]U_2(s) \end{aligned} \tag{4.3}$$

Uma vez satisfeita a condição (4.2), o sistema de quações (4.3), compactado numa equação matricial única, assume a forma diagonal

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{d1}(s) & 0 \\ 0 & G_{d2}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

Por meio de uma dedução análoga a esta, que resultou no sistema (4.4), obtém-se o resultado generalizado (4.1), para uma planta MIMO de ordem m qualquer.

Para concluir esta seção destacam-se dois resultados centrais. O primeiro deles é que a forma diagonal (4.1) permite o desacoplamento pretendido para uma planta MIMO, com m entradas e m saídas. Além do desacoplamento, a escolha dos polos de $G_{di}(s)$ pode ser feita visando obter outros requisitos de desempenho, tais como a melhoria de características para a resposta temporal de cada um dos subsistemas SISO $Y_i(s) = G_{di}(s)U_i(s)$.

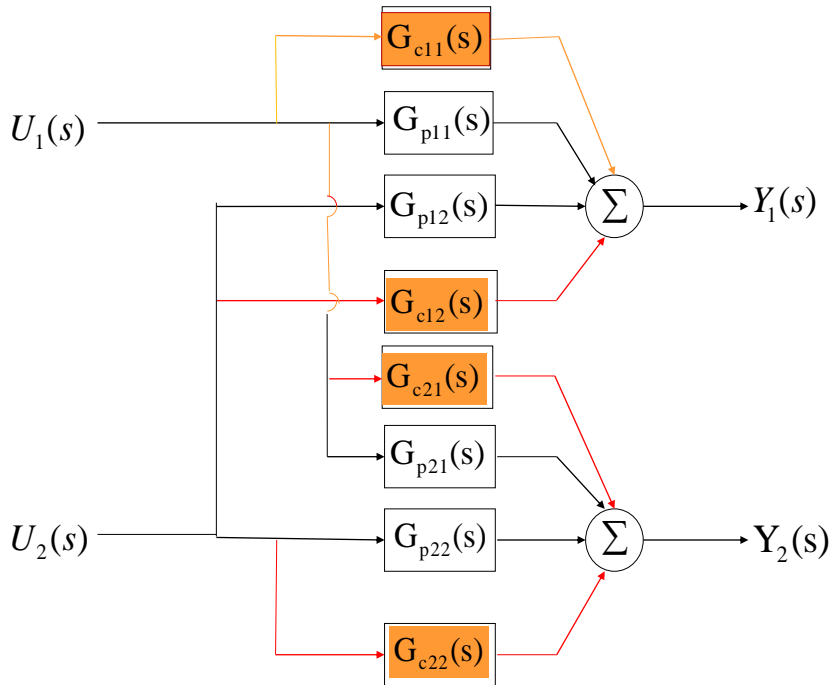


Figura 3: Planta MIMO de 2 entradas e 2 saídas com desacoplamento.

5 CONTROLE ÓTIMO COM BASE EM LQR

Nesta seção apresenta-se uma proposta de controle ótimo, descentralizado por subsistema SISO caracterizado anteriormente, que tem como objetivo a minimização de um índice de desempenho quadrático sob uma restrição LMI. Esta idéia está formalizada por meio do Teorema 2, e tem como base a técnica de controle ótimo conhecida como LQR.

Teorema 2. *Suponha que cada subsistema (3.6), com $D_i = 0$, satisfaz à condição de controlabilidade de saída (3.7). Considere uma lei de controle de realimentação de saída do tipo $u_i(t) = -K_i y_i(t)$ a ser aplicada ao subsistema (3.6), de modo que o subsistema de malha fechada (3.8) seja estável. Existe um escalar K_i ótimo tal que a função de custo quadrática definida por (3.9) seja mínima, se existirem matrizes ótimas $P_i = P_i^T > 0$ e $R_i = R_i^T$, tais que a função quadrática $J_i = x_o^T P_i x_o$ seja mínima sob a restrição (3.10), onde x_o é um vetor de estados no instante inicial.*

Prova. Substituindo a lei de controle $u_i(t) = -K_i y_i(t)$, na expressão (3.9), já considerando a equação de saída $y_i(t) = C_i x_i(t)$, obtém-se

$$J_i = \int_0^\infty x_i^T(t) [C_i^T Q_i C_i + C_i^T K_i^T R_i K_i C_i] x_i(t) dt \tag{5.1}$$

Existe uma relação direta entre funções de Lyapunov e índices de desempenho quadráticos generalizados [1] - pag. 880. Com base nesta referência define-se a função de Lyapunov

$$x_i^T(t)F_i x_i(t) = -\frac{d}{dt}[x_i^T(t)P_i x_i(t)] \tag{5.2}$$

onde $F_i = [C_i^T Q_i C_i + C_i^T K_i^T R_i K_i C_i]$, presente em (5.1), é uma matriz simétrica e definida (ou semidefinida) positiva. Desenvolvendo a derivada do lado direito de (5.2) tem-se

$$x_i^T(t)F_i x_i(t) = -\dot{x}_i^T(t)P_i x_i(t) - x_i^T(t)P_i \dot{x}_i(t) \tag{5.3}$$

Substituindo a equação de estados do subsistema (3.8), e sua transposta, na Equação (5.3), resulta

$$x_i^T(t)F_i x_i(t) = -x_i^T(t)[(A_i - B_i K_i C_i)^T P_i + P_i(A_i - B_i K_i C_i)]x_i(t)$$

ou

$$(A_i^T - C_i^T K_i^T B_i^T)P_i + P_i(A_i - B_i K_i C_i) + C_i^T K_i^T R_i K_i C_i + C_i^T Q_i C_i = 0$$

Usando um artifício matemático, que consiste em adicionar a matriz nula $0_{n_i \times n_i} = P_i B_i R_i^{-1} B_i^T P_i - P_i B_i R_i^{-1} B_i^T P_i$ à equação anterior, tem-se

$$A_i^T P_i + P_i A_i + [-C_i^T K_i^T B_i^T P_i - P_i B_i K_i C_i + C_i^T K_i^T R_i K_i C_i + P_i B_i R_i^{-1} B_i^T P_i] - P_i B_i R_i^{-1} B_i^T P_i + C_i^T Q_i C_i = 0 \tag{5.4}$$

A minimização do índice de desempenho J_i , em termos de K_i , requer que toda parte destacada entre colchetes seja nula, ou equivalentemente

$$P_i B_i (R_i^{-1} B_i^T P_i - K_i C_i) + C_i^T K_i^T (R_i K_i C_i - B_i^T P_i) = 0 \tag{5.5}$$

Note que a combinação das equações (5.4) e (5.5) resulta na equação matricial a seguir, conhecida da teoria de Controle Ótimo como *Equação algébrica de Riccati*.

$$A_i^T P_i + P_i A_i - P_i B_i R_i^{-1} B_i^T P_i + C_i^T Q_i C_i = 0$$

Visando convertê-la numa desigualdade matricial, esta é reescrita como

$$A_i^T P_i + P_i A_i - P_i B_i R_i^{-1} B_i^T P_i = -C_i^T Q_i C_i \tag{5.6}$$

Sabendo que $Q_i > 0$ e $C_i^T C_i > 0$ então $-C_i^T Q_i C_i < 0$ e portanto a Equação (5.6) é equivalente a

$$A_i^T P_i + P_i A_i - P_i B_i R_i^{-1} B_i^T P_i < 0 \tag{5.7}$$

Aplicando o complemento de Schur a esta desigualdade, chega-se a (3.10), como se queria demonstrar. Considere a integral de (5.2), nos limites de zero a infinito, e que o subsistema de malha fechada (3.8) é estável, o que implica em $x_i(\infty) = 0$. Demonstra-se que a função objetivo a ser minimizada é $J_i = x_0^T P_i x_0$.

Sabendo que K_i é um escalar diferente de zero, então a igualdade (5.5) é satisfeita se

$$R_i^{-1} B_i^T P_i - K_i C_i = R_i K_i C_i - B_i^T P_i = 0 \quad (5.8)$$

ou

$$K_i = R_i^{-1} B_i^T P_i C_i^T \quad (5.9)$$

Portanto, uma vez definida a matriz R_i e encontrada a matriz P_i ótima, tais que a função de custo quadrática $J_i = x_0^T P_i x_0$ assuma um valor mínimo, sob a restrição matricial (5.7), que é equivalente a (3.10), o passo seguinte é o cálculo da matriz de realimentação K_i ótima, usando a equação acima.

6 ALGORITMO PARA PROJETO

Com base nos resultados principais, contidos nas Seções (4) e (5), apresenta-se nesta seção um procedimento para o projeto de um compensador de desacoplamento, em primeira etapa, e de uma matriz de realimentação de saídas ótima, em segunda etapa.

Passo 1 Para uma dada planta MIMO, com m entradas e m saídas controláveis, determina-se a matriz de transferência:

$$G_P(s) = \begin{bmatrix} G_{p11}(s) & G_{p12}(s) & \cdots & G_{p1m}(s) \\ G_{p21}(s) & G_{p22}(s) & \cdots & G_{p2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{pm1}(s) & G_{pm2}(s) & \cdots & G_{pmm}(s) \end{bmatrix}$$

Passo 2 Especifica-se a matriz de transferência para o sistema diagonal desejado (4.1), sob a forma:

$$G_D(s) = \begin{bmatrix} G_{d11}(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & G_{d22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & G_{dmm}(s) \end{bmatrix}$$

Passo 3 Determina-se a matriz de transferência do compensador, cujos elementos satisfazem (4.2). Os passos seguintes são realizados m vezes.

Passo 4 Para a etapa de Controle Ótimo, aplicando LQR com uma formulação LMI, determina-se inicialmente o modelo no espaço de estados (3.6) para cada subsistema SISO (3.5).

Passo 5 Considerando a lei de controle de realimentação de saída $u_i(t) = -K_i y_i(t)$, determina-se o ganho de realimentação de saída ótimo K_i^* , tal que o sistema de malha fechada (3.8) se mantenha estável e a função de custo quadrática J_i , definida por (3.9), seja minimizada sob a restrição LMI (3.10).

7 EXEMPLO NUMÉRICO ILUSTRATIVO

Visando demonstrar, computacionalmente, os resultados propostos neste trabalho, apresentam-se, para um dado modelo de planta MIMO, curvas de respostas a entradas em degrau unitário, aplicadas em instantes distintos, antes e após o desacoplamento, respectivamente. Numa segunda etapa, verifica-se o efeito do controle combinado LQR-LMI, sobre o sistema desacoplado na primeira etapa. Este efeito pode ser mensurado, verificando-se a tendência numérica do índice de desempenho quadrático de cada subsistema SISO, em função do número de iterações. O exemplo escolhido e suas justificativas estão especificados na subseção seguinte.

Para os testes da primeira etapa, considera-se o vetor de entradas, com sua correspondente transformada de Laplace, dado por dois degraus unitários, em instantes distintos 1 e 3

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & \text{para } t \geq 1 \\ & \text{para } t \geq 3 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \text{para } t < 1 \\ & \text{para } t < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-s}/s \\ e^{-3s}/s \end{bmatrix} \tag{7.1}$$

7.1 Planta MIMO com acoplamento

O modelo considerado como exemplo, de [3], dado pela relação entre a transformada de Laplace do vetor de saídas, $Y(s)$, e a transformada de Laplace do vetor de entradas, $U(s)$, envolvendo a matriz de transferência da planta, $G_p(s)$, é especificado por

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{(s+10)} & \frac{s+10}{(s^2+6s+10)} \\ \frac{-1}{s} & \frac{3s}{(s^2+3s+3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} Y_1(s) = \frac{10}{(s+10)}U_1(s) + \frac{s+10}{(s^2+6s+10)}U_2(s) \\ Y_2(s) = \frac{-1}{s}U_1(s) + \frac{3s}{(s^2+3s+3)}U_2(s) \end{cases} \tag{7.2}$$

Uma justificativa para a escolha deste exemplo é a diferença, relativamente grande em módulo, entre os valores singulares do par $G_{p11}(s)$, $G_{p21}(s)$ (ligados à entrada $U_1(s)$) e os valores singulares do par $G_{p12}(s)$, $G_{p22}(s)$ (ligados à entrada $U_2(s)$), respectivamente. Outra razão é a presença de integradores no par de ganhos $G_{p11}(s)$ e $G_{p21}(s)$.

O modelo da planta, dado por (7.2), submetido às entradas na forma (7.1), está representado pelo diagrama em blocos da Figura 4a. Para o referido sistema, as variáveis de saída têm o comportamento dinâmico descrito pelas curvas da Figura 4b, onde $y_1(t)$ se estabiliza em $u_1(t) + u_2(t) = 2$, enquanto $y_2(t)$ segue uma rampa decrescente, comprovando a interação de todas as entradas com todas as saídas.

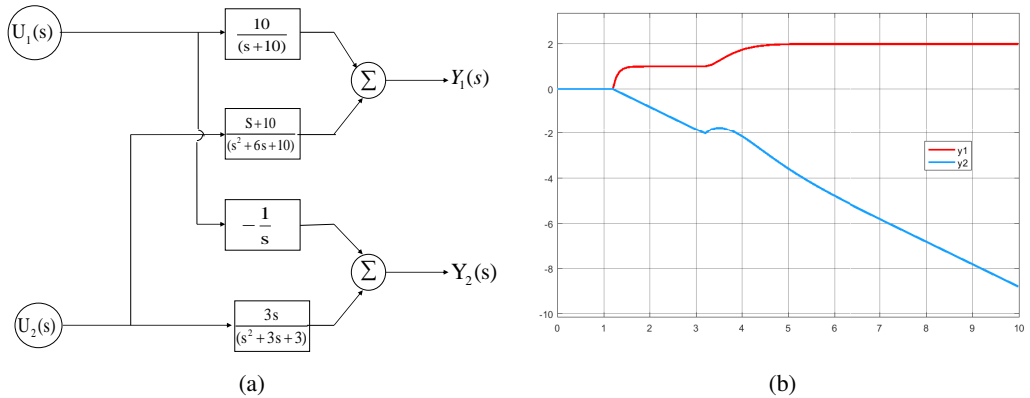


Figura 4: Planta MIMO do exemplo numérico: (a) modelo e (b) variáveis de saída.

7.2 Planta MIMO desacoplada

Considera-se que o sistema desacoplado tem a forma particular desejada

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{s+12} & 0 \\ 0 & \frac{3s}{s^2+3s+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} Y_1(s) = \frac{10}{s+12} U_1(s) \\ Y_2(s) = \frac{3s}{s^2+3s+3} U_2(s) \end{cases} \quad (7.3)$$

Portanto, com base em (4.2) e considerando as matrizes de transferência dos modelos, da planta (7.2), do sistema desejado (7.3), determina-se a matriz de transferência do compensador

$$G_C(s) = \begin{bmatrix} \frac{-20}{s^2+22s+120} & \frac{-s-10}{s^2+6s+10} \\ \frac{1}{s} & 0 \end{bmatrix}$$

O modelo da planta, dado por (7.2), com entradas na forma (7.1), está representado pelo diagrama em blocos da Figura 5a, enquanto o comportamento dinâmico das variáveis de saída está ilustrado pelas curvas da Figura 5b. Observa-se que a saída $y_2(t)$ se estabiliza em zero porque o polo da entrada $U_2(s)$ se cancela com o zero de $G_{d2}(s)$.

7.3 Teste de otimização do índice de desempenho quadrático

Após a conversão de cada modelo de subsistema SISO, especificado em (7.3), para o correspondente modelo no espaço de estados, a etapa de controle LQR com LMI pode ser resolvida numericamente, seguindo os passos 4 e 5 do algoritmo da Seção 6. Com este procedimento, determinam-se matrizes ótimas K_1 e K_2 , que irão compor o sistema desacoplado, sob controle ótimo descentralizado, conforme o modelo da Figura 6a. Sabendo que a função objetivo do problema de otimização é $J = x_0^T P x_0$, e considerando como exemplo, os valores para o estado inicial:

$$x_o = 1,6147 \text{ (para o subsistema 1) e } x_o = \begin{bmatrix} 1,7058 \\ 0,9270 \end{bmatrix} \text{ (para o subsistema 2)}$$

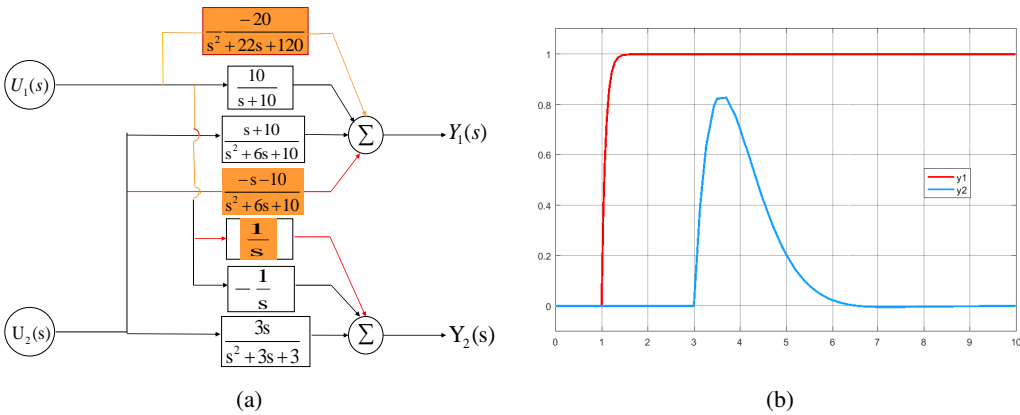


Figura 5: Planta MIMO desacoplada: (a) modelo e (b) variáveis de saída.

encontram-se os resultados numéricos para a função de custo quadrática J_i , em função do número de iterações, por subistema SISO, os quais estão plotados na Figura 6b.

Nota-se que, na iteração 1, $J_1 = 2,6983$ é bem menor que $J_2 = 23,7471$, e na iteração 10, $J_2 = 3,8576$ está mais próximo de $J_1 = 2,6073$, os quais são seus valores ótimos. É razoável supor que J_1 se manteve praticamente constante porque já partiu de um valor muito próximo do seu valor ótimo, enquanto J_2 partiu de um valor relativamente bem maior e diminuiu significativamente (83,7%) até o valor ótimo.

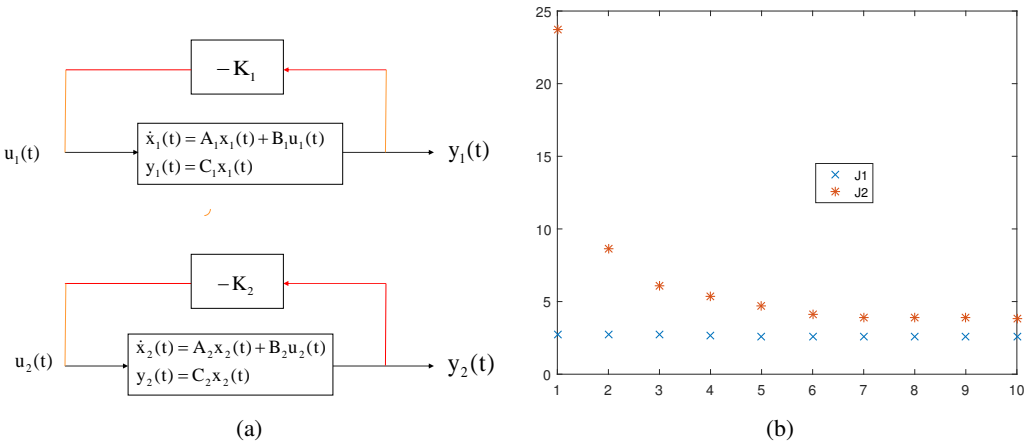


Figura 6: Sistema de controle desacoplado e ótimo: (a) modelo e (b) função de custo versus número de iterações.

8 CONCLUSÕES

Para sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas - MIMO, foram apresentados resultados que permitem o desacoplamento e o controle ótimo via LQR com formulação LMI. Uma análise comparativa de sistemas de entrada única e saída única - SISO com sistemas MIMO foi desenvolvida ao longo do trabalho, procurando-se mostrar que o nível de complexidade dos sistemas de controle MIMO é maior que o nível de complexidade dos sistemas de controle SISO, tanto do ponto de vista da modelagem, como da análise, bem como do projeto. Neste contexto, a presença de interações entre as entradas e as saídas de um sistema MIMO, e possíveis inconvenientes decorrentes dessas interações para o seu controle, juntamente com outras particularidades, foram abordadas. Através de diagrama de blocos, os subsistemas que formam a estrutura de um sistema MIMO foram representados para ilustrar fisicamente as referidas interações. Os resultados foram divididos em duas etapas, começando pela proposição de uma estrutura de compensador que permite o desacoplamento de sistemas com o número de entradas igual ao número de saídas; e continuando com uma proposição de controle ótimo baseada em LQR, com uma formulação LMI. Ao final, um exemplo numérico ilustrativo serviu para reforçar a coerência dos resultados.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao Departamento de Engenharia Elétrica (DEE) e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEE) da Universidade Federal do Maranhão (UFMA), ao Laboratório de Sistemas Embarcados e Controle Inteligente (LABSECI), à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela infraestrutura de desenvolvimento e apoio financeiro.

ABSTRACT. The problem addressed is the decoupling of a MIMO system, with the number of inputs equal to the number of outputs, as well as the optimal control of this system after its decoupling. The first step is to define a compensator structure for the MIMO system, which makes each output dependent on a single input. For the decoupled system, a feedback control law is proposed, where the feedback gain matrix is determined by optimizing a performance index defined as a quadratic cost function. The control method is based on LQR, through which an LMI formulation is adapted.

Keywords: decoupling of MIMO systems, optimal control, Linear Quadratic Regulator (LQR), linear matrix inequalities (LMI), output feedback.

REFERÊNCIAS

- [1] Ogata, K., Engenharia de Controle Moderno, Pag. 878-887, *Prentice/Hall do Brasil*, Rio de Janeiro, 1985.
- [2] Barão, R. C., Algoritmos de Controle Ótimo quadrático com restrições. Escola Politécnica da USP, *dissertação de mestrado*, 1997.

- [3] Hanselman, D., and Littlefield B., Matlab 5 - Guia do usuário. MAKRON Books do Brasil Editora Ltda., São Paulo, 1999.
- [4] Goodwin, G. C., Graebe S. F., and Salgado M. E., Control System Design. Prentice Hall, Valparaiso, January 2000.
- [5] Dorf R. C., and Bishop R. H., Sistemas de Controle Modernos. Livros Técnicos e Científicos, LTC, Rio de Janeiro, 8a. edição, 2001.
- [6] Apkarian P., Tuan, H. D. and Bernusou J., Continuous-time analysis, eigenstructure assignment and H_2 synthesis with enhanced linear matrix inequalities (LMI) characterizations. IEEE Transactions on Automatic Control, Notre Dame, V. 46, n. 12, p. 1941-1946, 2001.
- [7] Nise, N. S., Engenharia de Sistemas de Controle. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., LTC, Rio de Janeiro, 3a. edição, 2002.
- [8] Leite V. J., Montagner, V. F., Oliveira P. J. D., Oliveira R. C., Ramos D. C., and Peres P. L., Estabilidade robusta de sistemas lineares através de desigualdades matriciais lineares. Controle & Automação, Revista da Sociedade Brasileira de Automática, V. 15, N. 1, p. 24-40, 2004.
- [9] Oliveira R. C., and Peres, P. L., LMI Conditions for robust Stability analysis based on Polynomially parameter-dependent Lyapunov functions. Systems & Control Letters, Elsevier V. 55, p. 52-61, 2006.
- [10] Paiva, B. M., Sintonia Automatizada e ganhos de retroação de estados em sistemas de controle com auxílio de redes neurais artificiais. Instituto de Engenharia de Sistemas e Tecnologias da Informação da Universidade Federal de Itajubá, *dissertação de mestrado*, 2008.
- [11] Ogata, K., Engenharia de Controle Moderno. Pearson Prentice Hall, *Companion Website*, São Paulo, 5a. edição, 2010.
- [12] Franklin, G. F., Powell, J. D., and Emami-Naeini, A., Sistemas de Controle para Engenharia. Editora Bookman, Porto Alegre, 6a. edição, 2013.
- [13] Chandak, Ashok S. and Patil Anil J., Robust LQR Control Design of Gyroscope. International Journal of Advanced Computer Research, March 2013.
- [14] Wang, L., Ni, H., Zhou, W., Pardalos, P.M., Fang, J., and Fei, M. (2014). Mbpoa-based LQR controller and its application to the double-parallel inverted pendulum system. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 36, 262-268. <https://doi.org/10.1016/j.engappai.2014.07.023>.
- [15] Ribeiro, J. M. S., Ortunho T. V., Teixeira, M. C. M., and Garcia J. P. F., Investigação de acionamento de motor de indução trifásico utilizando controladores robustos projetados por LMIs. Apresentado no DICON, Natal-RN, 2015.
- [16] Garrido J., Vasquez, Francisco and Morrilla Fernando, Multivariable Control by decoupling. International Journal of Systems Science, 2016.
- [17] Giraldo, A. C., Flesch, R.C.C. and Rico J.E., Decoupling filtered Smit Predictive design for multivariable systems with multiple time delays. 12 th IEEE International Conference on Industry Applications, 2016.

- [18] Arati, D. C., Narayanan S. and Sivakumaran N., Decoupling of linear multivariable system using PID output feedback. Indian Control Conference, january 2016.
- [19] Karthick, S., Jerome J., Kumar, V. and Raaja G., APSO Based Weighting Matrices Selection of LQR Applied to Tracking Control of SIMO System. 3rd International Conference on Advanced Computing Networking and Informatics, Smart Innovation, Systems and Technologies, 2016.
- [20] Sen, M. Arif and Mete K., Optimal Tuning of a LQR Controller for na Inverted Pendulum Using the Bees Algorithm. Journal of Automation and Control Engineering, Vol. 4, october 2016.
- [21] Tan, A.H. and Cham, C.L. (2016). Identification and modeling of a multivariable thermodynamic system. In *2016 IEEE Region 10 Conference (TENCON)*, 3378-3381.
- [22] Beteto, M.A., Assunção, E., Teixeira, M.C., Silva, E.R., Buzachero, L.F., and Caun, R.P. (2018). New design of robust LQR-state derivative controllers via LMIs. 9th IFAC Symposium on Robust Control Design ROCOND 2018. *IFAC-PapersOnLine*, 51(25), 422-427.
- [23] He, J., Peng, D., Yan, B., and Liu, B. (2018). The application study for coordinated control system based on multi-variable adaptive dynamic decoupling. In *2018 33rd Youth Academic Annual Conference of Chinese Association of Automation (YAC)*, 560-563.
- [24] Li, P., Yang, X., and Shardt, Y.A.W. (2018). Simultaneous robust, decoupled output feedback control for multivariate industrial systems. *IEEE Access*, 6, 6777-6782.
- [25] Machado, M.M., Carvalho, A.J., Santos, M.F., and Carvalho, J.R. de, Case study: Level and temperature multivariable control and design via arduino through control loop decoupling. In *2018 19th International Carpathian Control Conference (ICCC)*, 247-252.
- [26] Wen, S., Wang, J., Gao, X., and Fang, X. (2018). Water lever decoupling control strategy and simulation experiments of high pressure heating system. In *2018 Chinese Control And Decision Conference (CCDC)*, 611-616.
- [27] Zhang, Y., Chai, T., Wang, D., and Chen, X. (2018). Virtual unmodeled dynamics modeling for nonlinear multivariable adaptive control with decoupling design. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 48(3), 342-353.
- [28] Eugenio Alcalá, Vicenç Puig, Joseba Quevedo, Teresa Escobet, and Ramon Comasolivas. Autonomous vehicle control using a kinematic lyapunov-based technique with LQR-LMI tuning. *Control engineering practice*, 73:1-12, 2018.
- [29] Carlton, Z., Wei, W., and Cohen, K. (2020). 7-LQR controller applied to quadcopter system dynamics identification and verification through frequency sweeps. In F. Cazaurang, K. Cohen, and M. Kumar (eds.), *Multi-Rotor Platform-based UAV Systems*, 129-152. ISTE. <https://doi.org/10.1016/B978-1-78548-251-9.50007-8>.
- [30] Navrátil, P., Pekar, L., and Matusu, R. (2020). Control of a multivariable system using optimal control pairs: A quadruple-tank process. *IEEE Access*, 8, 2537-2563.
- [31] Rego, R., and Costa, M., Output Feedback Robust Control with Anti-Windup Applied to the 3SSC Boost Converter. *IEE Latin America Transactions*, V. 18, N. 5, May 2020.

- [32] Rizka Bimarta and Kyeong-Hwa Kim. A robust frequency-adaptive current control of a grid-connected inverter based on LMI-LQR under polytopic uncertainties. *IEEE Access*, 8:28756-28773, 2020.
- [33] Zhang Dongmei, Wang Xingang, and Meng Li. Consensus for multi-agent dynamic systems: An LQR perspective. In *Proceedings of the 31st Chinese Control Conference*, pages 6261-6266, July 2012.
- [34] S. K. Ghosh, T. K. Roy, M. A. H. Pramanik, and M. A. Mahmud. LMI-based optimal linear quadratic controller design for multiple solar pv units connected to distribution networks. In *2021 IEEE Texas Power and Energy Conference (TPEC)*, pages 1-6, Feb 2021.
- [35] Ji-Woong Lee and Pramod P. Khargonekar. Constrained infinite-horizon linear quadratic regulation of discrete-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(10):1951-1958, Oct 2007.
- [36] Peizhou Xia, Haochen Shi, Huiqing Wen, Qinglei Bu, Yihua Hu, and Yong Yang. Robust LMI-LQR control for dual-active-bridge dc-ac converters with high parameter uncertainties. *IEEE Transactions on Transportation Electrification*, 6(1):131-145, March 2020.

