

## Bifurcações em Redes Hamiltonianas Acopladas e o Problema dos Três Corpos

A. MELO

Recebido em 15 de março de 2021 / Aceito em 13 de setembro de 2023

**RESUMO.** O formalismo de células acopladas é um jeito sistemático de representar e estudar equações diferenciais acopladas não-lineares usando grafos direcionados. Verificamos que apenas dígrafos acoplados bidirecionalmente podem representar sistemas hamiltonianos. Apresentamos resultados recentes em redes de sistemas hamiltonianos acoplados linearizados com uma discussão do teorema de Hopf hamiltoniano neste contexto. Mostramos que o autoespaço numa bifurcação de codimensão um de um equilíbrio síncrono de uma rede regular hamiltoniana pode ser expresso em termos dos autoespaços da matriz de adjacência do dígrafo associado. Exibimos uma versão do teorema do centro de Lyapunov para esse tipo de rede.

**Palavras-chave:** sistemas hamiltonianos, células acopladas, bifurcação de equilíbrio, subespaço de sincronia.

### 1 INTRODUÇÃO

Vários formalismos foram propostos nos últimos anos para estudar redes de equações diferenciais acopladas. O formalismo por grupoides desenvolvido por Golubitsky, Stewart e vários co-autores [4, 6, 11] tem mostrado, dentre outros resultados, que essas redes suportam tipos não-genéricos de fenômenos de bifurcação. Redes podem também suportar estruturas adicionais. Por exemplo, Manoel e Roberts [7] estudaram quando uma rede pode ser considerada como um sistema gradiente e forneceram uma aplicação ao modelo de Kuramoto e o modelo Antiferromagnético XY. Numa direção similar, em Chan *et al.* [2], os autores olharam para o problema de acoplar sistemas hamiltonianos numa rede e examinar quando a estrutura da rede preserva a estrutura hamiltoniana. Eles também apresentaram resultados de teoria linear na proximidade de uma solução de equilíbrio e estabeleceram alguns resultados em bifurcação local. Neste trabalho, revemos alguns desses resultados através de um resumo do que é exibido em [9].

### 2 REDES DE CÉLULAS HAMILTONIANAS ACOPLADAS

Sistemas de células acopladas são coleções de  $r$  equações diferenciais ordinárias chamadas de células com espaço de fase variável  $x_i \in \mathbb{R}^{k_i}$ , para  $i \in \{1, \dots, r\}$ . Por “célula” queremos dizer uma

componente ou unidade individual que possui seu próprio comportamento dinâmico. Suponha que a célula  $i$  receba entradas das células  $j_1, \dots, j_m$ . Então, a dinâmica da  $i$ -ésima célula pode ser escrita como

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_i, x_{j_1}, \dots, x_{j_m}).$$

Sistemas de células acopladas podem ser representados graficamente usando grafos direcionados (digrafos) os quais consistem de um conjunto  $\mathcal{C}$  de vértices (células) e um conjunto  $\mathcal{S}$  de setas onde cada seta relaciona um par de vértices distintos. Veja a Figura 1 e repare que a seta  $\{1, 3\}$  é distinta de  $\{3, 1\}$  por exemplo.

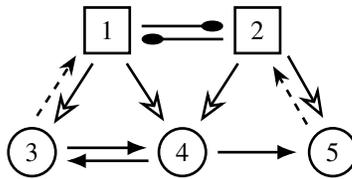


Figura 1: Exemplo de um digrafo representando uma rede de 5 células.

A conectividade de uma rede  $\mathcal{G}$  é guardada em sua matriz de adjacência  $A_{\mathcal{G}}$ , onde suas linhas e colunas são indexadas pelos vértices de  $\mathcal{G}$  de tal modo que  $a_{ij}$  representa o número de setas indo da célula  $i$  para a célula  $j$ . Para acoplamento bidirecional, usaremos uma aresta não-direcionada para representar um par de setas em sentidos opostos para simplificar sua representação gráfica.

Um sistema de células acopladas é *homogêneo* se todas as células têm espaços de fase de mesma dimensão. Um sistema homogêneo é dito *regular* se todas as suas funções de acoplamento são idênticas. Em particular, uma rede regular tem o mesmo número de entradas em cada célula, também chamado de *valência* da rede. Nesta seção em diante nos restringimos a redes regulares.

Um sistema  $\dot{x} = g(x)$  com  $x \in \mathbb{R}^{2n}$  é dito *hamiltoniano* se existe uma função suave  $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g(x) = J\nabla H(x)$  onde

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix},$$

com  $I_n$  sendo a matriz identidade. Olharemos para sistemas hamiltonianos regulares onde cada célula tem dimensão  $2n$  e é escrita na forma

$$\frac{dx_i}{dt} = g(x_i, x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) \text{ para } i = 1, \dots, r, \tag{2.1}$$

onde  $g(x_i, 0, \dots, 0) = J\nabla H(x_i)$  para alguma função suave  $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  implica que cada célula é um sistema hamiltoniano. Notemos que o número igual de entradas para cada célula restringe a forma de  $g$  a um número fixo de entradas. Assumimos o acoplamento linear do sistema (2.1) impondo a condição

$$D_{x_{i_k}} g(0, 0, \dots, 0) = \Psi \text{ para } k = 1, \dots, m, \tag{2.2}$$

onde  $\Psi$  é uma matriz quadrada não-nula de ordem  $2n$  chamada de *matriz de acoplamento*. Podemos representar a estrutura de acoplamento do sistema pela matriz  $A \otimes \Psi$ , onde  $\otimes$  é o produto

tensorial de matrizes. Notemos que uma matriz  $M$  é hamiltoniana se  $M^T J + JM = 0$ . Podemos enunciar o primeiro resultado.

**Teorema 2.1.** *Considere o sistema regular (2.1) com acoplamento linear (2.2) e para o qual cada célula é hamiltoniana. Então, o sistema acoplado completo é hamiltoniano se, e somente se, a matriz de acoplamento  $\Psi$  é hamiltoniana e a matriz de adjacência  $A$  é simétrica.*

A prova deste resultado é obtida separando o sistema em termos lineares e não-lineares. Como o acoplamento é linear, os termos não-lineares são os mesmos para todas as células. A estrutura hamiltoniana de  $\Psi$  e a simetria de  $A$  são condições necessárias e suficientes para o sistema linearizado ser hamiltoniano. É possível construir a função hamiltoniana para o sistema inteiro facilmente devido à uniformidade dos termos não-lineares nas células.

**Exemplo 2.1.1.** *Considere a rede  $\mathcal{G}$  de valência 4 mostrada na Figura 2.*

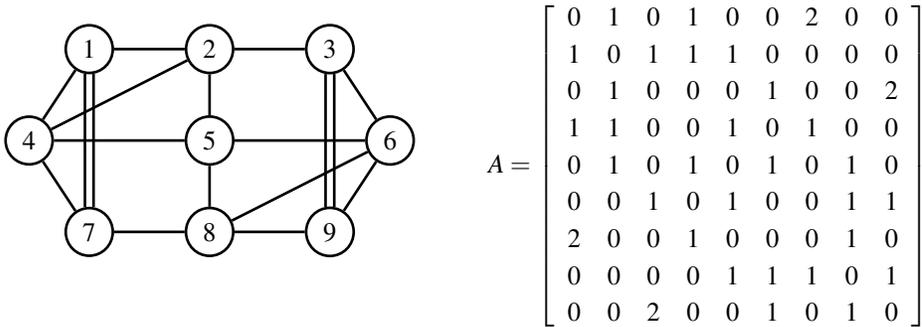


Figura 2: Rede regular não-direcionada de 9 células com simetria  $\mathbb{D}_2$  e sua matriz de adjacência.

Note que  $\mathcal{G}$  tem grupo de simetria abeliano  $\mathbb{D}_2$  gerado pelas reflexões  $(2\ 6)(1\ 9)\ (4\ 8)$  e  $(2\ 4)(3\ 7)(6\ 8)$ . A matriz de adjacência  $A$  possui autovalores simples  $4, \pm 2\sqrt{2}$  e autovalores  $\pm 1, -2$  com multiplicidade 2. Como o grupo é abeliano, notamos que os autovalores de multiplicidade 2 não são consequência da simetria mas da arquitetura da rede. Designadamente, os autovetores de  $-2$  são  $V_1 = (1, 0, -1, 0, 0, 0, -1, 0, 1)^T$  e  $V_2 = (0, 1, -1, 1, -2, 1, -1, 1, 0)^T$ .

### 3 TEORIA LINEAR

Consideramos que o sistema (2.1) satisfaz o Teorema 2.1 de modo que  $A$  é simétrica e  $\Psi$  é hamiltoniana. Assumimos, sem perda de generalidade, que o sistema (2.1) tem uma solução de equilíbrio na origem, ou seja,  $g(0, 0, \dots, 0) = 0$ . Seja  $\Phi = D_{x_i} g(0, 0, \dots, 0)$  a linearização da dinâmica da célula  $i$  na origem. Esta também é uma matriz de ordem  $2n$ . Então, a linearização de (2.1) na origem pode ser escrita como

$$M = I_n \otimes \Phi + A \otimes \Psi. \tag{3.1}$$

Mencionaremos agora alguns resultados de [4, Lema 2.3 e Lema 2.6]. Sejam  $\mu_1, \dots, \mu_s$  autovalores distintos de  $A$  e consideremos a matriz  $M_{\mu_i} = \Phi + \mu_i\Psi$ . Então, um resultado obtido é que os  $2nr$  autovalores de  $M$  são a união dos autovalores das matrizes  $M_{\mu_i}$  para  $i = 1, \dots, s$ . Em particular, se  $\mu \in \mathbb{R}$  é um autovalor de  $A$  com autoespaço associado  $E_A(\mu) \subset \mathbb{R}^r$ , então,  $E_A(\mu) \otimes \mathbb{C}^{2n}$  é invariante por  $M$ .

Para discutirmos a bifurcação de Hopf hamiltoniana na próxima seção, precisamos determinar a estrutura dos autoespaços se os autovalores no eixo imaginário colidem quando um parâmetro é variado. Colisões de autovalores em matrizes hamiltonianas podem ser descritas usando a assinatura de Krein [8, Seção 9.11] e para o caso de autovalores puramente imaginários, duas situações ocorrem: a ressonância  $1 : 1$  e a ressonância  $1 : -1$ . Apenas a ressonância  $1 : -1$  origina bifurcações, como estabelecido por Buono *et al.* [1].

Agora, identificamos a situação em que um par de autovalores, puramente imaginários e em ressonância  $1 : -1$ , surgem quando um parâmetro é variado. A partir de uma matriz  $M$  definida por (3.1), dizemos que  $(\Phi, \Psi)$  é um par de codimensão um hamiltoniano se todos os autovalores de  $M_{\mu_1}, \dots, M_{\mu_s}$  são distintos ou exatamente uma tal matriz  $M_{\mu_j}$ , para algum  $j = 1, \dots, s$ , tem um autovalor nulo semisimples de multiplicidade 2 ou um autovalor puramente imaginário em ressonância  $1 : -1$ . Temos então o seguinte resultado:

**Proposição 3.1** ([2, Teorema 3.10]). *Suponha que  $(\Phi, \Psi)$  é um par de codimensão um hamiltoniano com  $\sigma = i\omega$  em ressonância  $1 : -1$  um autovalor de  $M_\mu$  onde  $\mu$  é um autovalor semisimples de  $A$ . Seja  $G_M(\sigma)$  o autoespaço generalizado de  $\sigma$  em  $M$ , então  $G_M(\sigma) \simeq E_A(\mu) \oplus E_A(\mu) \oplus E_A(\mu) \oplus E_A(\mu)$  e existe uma base de  $E_A(\mu) \otimes \mathbb{C}^{2n}$  tal que*

$$M|_{G_M(\sigma)} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 1 & 0 \\ \omega & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega \\ 0 & 0 & \omega & 0 \end{pmatrix} \otimes I_p. \tag{3.2}$$

A demonstração desse resultado diz que a base de  $G_M(\sigma)$  pode ser escrita como

$$\bigoplus_{j=1}^p \text{span}\{V_j \otimes \text{Im}(U_1), V_j \otimes \text{Re}(U_1), V_j \otimes \text{Im}(U_2), V_j \otimes \text{Re}(U_2)\}, \tag{3.3}$$

onde  $V_1, \dots, V_p$  é uma base para  $E_A(\mu)$ .

**Observação 1.** *Notemos que a dimensão das células para que tenham autovalores puramente imaginários em ressonância  $1 : -1$  em  $M_\mu$  deve ser pelo menos 4. Observe que (3.2) exhibe o desdobramento versal da ressonância  $1 : -1$ .*

**Observação 2.** *Para a ressonância  $1 : -1$ , no desdobramento versal dado por (3.2) os autovalores se separam do eixo imaginário para formar um quarteto de Krein [8, Capítulo 9]. Veja a Figura 3.*

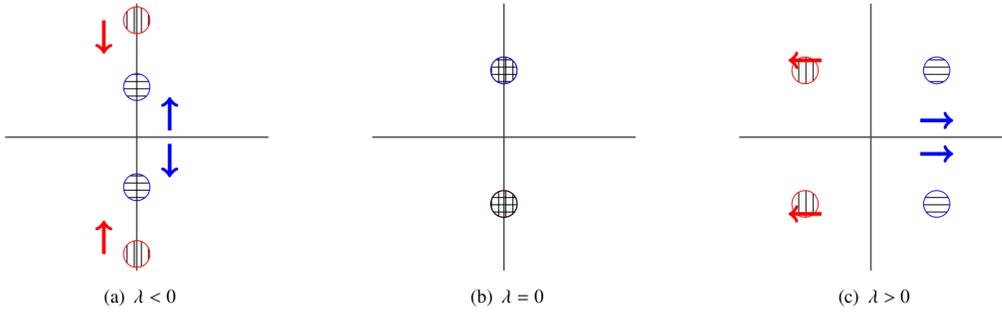


Figura 3: Movimento dos autovalores no plano complexo com respeito a uma ressonância  $1 : -1$ . (a) - (c) mostram os autovalores partindo do eixo imaginário à medida que  $\lambda < 0$  transita para  $\lambda > 0$ . Reproduzido de [2].

#### 4 O TEOREMA DE HOPF HAMILTONIANO

A bifurcação de soluções periódicas ocorrendo em ressonância  $1 : -1$  em sistemas genéricos de equações hamiltonianas é descrito pelo Teorema de Hopf Hamiltoniano [12]. No contexto de uma rede hamiltoniana de células hamiltonianas acopladas, a Proposição 3.1 fornece a estrutura linear na solução de equilíbrio a partir da qual podemos estabelecer o resultado neste contexto. No entanto, devemos identificar os subespaços onde a ressonância  $1 : -1$  pode ser aplicada e para a qual a sincronização entre algumas células é alcançada.

Para uma rede  $\mathcal{G}$  de  $r$  células, o espaço de fase total hamiltoniano  $P$  tem dimensão  $2nr$  e escrevemos suas coordenadas como  $x = (x_1, \dots, x_r)$  onde  $x_j$  designa a célula  $j$ . Aqui usaremos um conceito introduzido por Stewart *et al.* [11] sobre a estrutura de sistemas de células acopladas. Denotamos por  $\bowtie$  uma relação de equivalência em  $\mathcal{G}$  e definimos um *subespaço polidiagonal* associado com  $\bowtie$  como

$$\Delta_{\bowtie} = \{x \in P \mid x_i = x_j \iff i \bowtie j, \forall i, j \in \{1, \dots, r\}\}.$$

A definição exata de relação de equivalência balanceada requer uma longa discussão e nos referimos a [11] para todos os detalhes. Contudo, o subespaço  $\Delta_{\bowtie}$  é fluxo-invariante para todos os campos vetoriais admissíveis para a estrutura da rede se  $\bowtie$  é uma relação de equivalência balanceada [11, Teorema 6.5]. Para redes homogêneas e regulares, descreveremos essa noção a seguir. Para uma relação de equivalência  $\bowtie$ , todas as células na mesma classe de equivalência recebem uma cor distinta das outras classes de equivalência. Uma relação de equivalência  $\bowtie$  para uma rede regular é dita balanceada se, para todas as células  $c$  e  $d$  tais que  $c \bowtie d$ , então as células  $c$  e  $d$  recebem o mesmo número de entradas de células da mesma cor. O conceito de relação de equivalência balanceada é crucial para determinar subespaços onde a dinâmica do sistema acoplado é fluxo-invariante. Dizemos que  $\Delta_{\bowtie}$  é um subespaço de sincronia se  $\bowtie$  é balanceada. Em nosso contexto, precisamos não apenas de fluxo-invariância do subespaço de sincronia mas também saber que a estrutura hamiltoniana é preservada. Isso é provado em [2, Proposição 4.1].

Um subespaço de sincronia  $\Delta$  também é um subespaço simplético e se  $H$  é a função hamiltoniana para o campo vetorial em  $P$ , então  $H|_{\Delta}$  é a função hamiltoniana para o campo vetorial restrito a  $\Delta$ . Um sistema hamiltoniano em  $\mathbb{R}^4$  com ressonância  $1 : -1$ , como estudado em [12], tem forma normal dada pela função hamiltoniana

$$h(x, y) = S + N + \lambda P + \mathbf{a}P^2,$$

$$S = x_1y_2 - x_2y_1, \quad N = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2), \quad P = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2).$$

Em particular, o sinal do coeficiente  $\mathbf{a}$  determina o cenário de bifurcação: se  $\mathbf{a} > 0$ , as soluções periódicas entram em colapso na origem quando o parâmetro  $\lambda \rightarrow 0^-$  e para  $\mathbf{a} < 0$ , há duas famílias de soluções periódicas distintas que se cruzam na origem e se afastam da origem quando  $\lambda$  torna-se negativo. Suponha que  $dF(0, 0)$  tem autovalores  $\pm i\omega$  em ressonância  $1 : -1$  e  $E$  é o respectivo autoespaço generalizado.

**Teorema 4.2** ([2, Teorema 4.4]). *Considere uma família de 1-parâmetro numa rede hamiltoniana de células acopladas com um equilíbrio na origem. Suponha que a linearização na origem tenha uma ressonância  $1 : -1$  com autoespaço  $E$ . Seja  $\Delta$  um subespaço de sincronia tal que  $\dim(\Delta \cap E) = 4$ . Seja  $\mathbf{a}_{\Delta}$  o coeficiente da forma normal de  $h_0$  em  $\Delta \cap E$ . Então, desde que  $\mathbf{a}_{\Delta} \neq 0$ , os mesmos dois cenários ocorrem como no Teorema de Hopf Hamiltoniano tradicional para  $\mathbf{a} < 0$  e  $\mathbf{a} > 0$  acima descritos.*

Ilustraremos o Teorema 4.2 usando a rede  $\mathcal{G}$  do Exemplo 2.1.1.

**Exemplo 4.2.2.** *Relações de equivalência balanceadas são obtidas colorindo as células. Note que cada célula com a mesma cor recebe o mesmo número de entradas de um tipo de célula colorida. Veja a Figura 4 para a relação de equivalência obtida do subespaço de sincronia  $\Delta_1$  (esquerda). Por exemplo, repare como cada célula vermelha recebe duas entradas de células verdes e duas entrada de células azuis. Obtemos os subespaços de sincronia  $\Delta_1 = \{(a, b, c, b, d, b, c, b, a) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}^{2n}\}$  e  $\Delta_2 = \{(a, b, a, c, d, c, a, b, a) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}^{2n}\}$ . Como descrito em [2], se  $i\omega$  ocorre a partir da matriz  $M_{\mu}$  onde  $\mu$  é um dos autovalores de multiplicidade 2 de  $A$ , digamos,  $\mu = -2$  então tomando  $U_1$  e  $U_2$  como autovetor e autovetor generalizado de  $\sigma$ , respectivamente. Seja  $V_1, V_2$  uma base de  $-2$ . Por (3.3) vemos que  $G_M(\mu) \subset \Delta_1$  pois  $V_1, V_2 \in \Delta_1$  como pode ser verificado. Portanto, o Teorema 4.2 nos diz que existem famílias de soluções periódicas, conforme descrito no parágrafo anterior ao Teorema 4.2 que exibem o padrão de sincronização de  $\Delta_1$ .*

## 5 TEOREMA DO CENTRO DE LYAPUNOV PARA REDES HAMILTONIANAS

Finalizamos este resumo considerando uma extensão do Teorema do Centro de Lyapunov para o caso de redes hamiltonianas. Esse resultado descreve a existência de uma família de órbitas periódicas na vizinhança de uma solução de equilíbrio com um par de autovalores puramente imaginários não-ressonantes tais que a frequência da família de órbitas converge para a frequência dada pelo autovalor puramente imaginário [veja Meyer *et al.* ([10, Seção 9.2])].

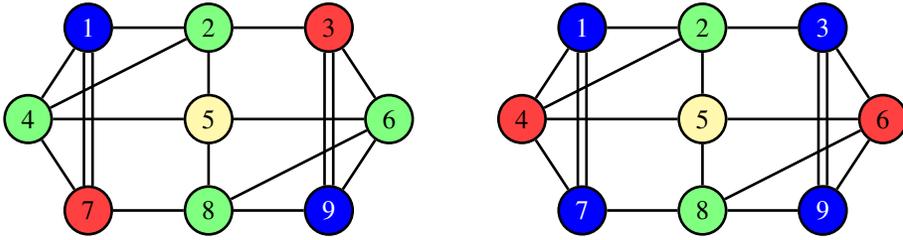


Figura 4: Colorações balanceadas não-triviais da rede de 9 células  $\mathcal{G}$  correspondentes aos subespaços de sincronia  $\Delta_1$  (esquerda) e  $\Delta_2$  (direita).

Seja  $\dot{x} = F(x)$  e assumamos  $F(0) = 0$ . Relembrando Meyer *et al.* ([10, Proposição 3.3.1]) onde autovalores de matrizes hamiltonianas reais se apresentam em quartetos  $\lambda, \bar{\lambda}, -\lambda$  e  $-\bar{\lambda}$ , obtemos o seguinte resultado:

**Teorema 5.3** ([9, Teorema 3.37]). *Suponha que  $dF(0)$  tem um par de autovalores puramente imaginários  $\lambda_1 = i\omega$  em  $M_\mu$  de modo que todos os demais autovalores  $\lambda$  (exceto por  $\bar{\lambda}_1$ ) são não-ressonantes; ou seja,  $\lambda \neq k\lambda_1$  para  $k \in \mathbb{Z}$ . Seja  $E$  o autoespaço de  $\lambda_1, \bar{\lambda}_1$  e  $\Delta$  um subespaço de sincronia tal que  $\dim(\Delta \cap E) = 2$ . Então, existe uma família de órbitas periódicas de 1-parâmetro  $\gamma_\varepsilon$  para  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$  em  $\Delta \cap E$  formando uma variedade suave 2-dimensional de órbitas periódicas contendo o equilíbrio  $x = 0$  e tais que o período de  $\gamma_\varepsilon$  converge para  $2\pi/\omega$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .*

**Proof.** As hipóteses do enunciado garantem que o subsistema hamiltoniano restrito ao subespaço de sincronia  $\Delta$  satisfazem as hipóteses do Teorema do Centro de Lyapunov convencional [10, Teorema 9.2.1]. Assim, a conclusão segue imediatamente.  $\square$

**Exemplo 5.3.3.** *No Exemplo 2.1.1, suponha que  $\lambda_1 = i\omega \in M_{-1}$  com autovetor complexo  $U_1$ . O autovalor  $-1$  de  $A$  tem autovetor  $W_1 = (0, 1, 0, -1, 0, -1, 0, 1, 0) \in \Delta_2$ . Então,  $\text{span}\{W_1 \otimes \text{Im}(U_1), W_1 \otimes \text{Re}(U_1)\} \subset \Delta_2$  e assim, as órbitas periódicas seguem o padrão ilustrado na Figura 4 (direita).*

## 6 O PROBLEMA RESTRITO DOS TRÊS CORPOS

O problema dos 3 corpos é relativamente simples de estabelecer: 3 partículas movem-se no espaço sobre a influência de sua atração gravitacional mútua; dadas as condições iniciais, determine seus movimentos subsequentes. Esse é um exemplo de problema matemático simples de propôr e difícil de resolver. Assim sua forma simplificada, chamada problema restrito dos 3 corpos (PR3C), é considerada em mecânica celeste. Nessa formulação, 2 dos corpos (chamados de primárias) giram em torno de seus centros de massa em órbitas circulares sobre a influência de sua atração gravitacional mútua formando um sistema de 2 corpos cujo movimento é conhecido. Um terceiro corpo (geralmente um asteroide, uma espaçonave ou um satélite) tem massa desprezível. Isso significa que este não perturba o movimento das primárias enquanto é gravi-

tacionalmente influenciado por elas, providenciando uma boa aproximação para situações físicas reais e foi usado como modelo em vários estudos.

Com sua formulação das leis de movimento, a lei da gravitação universal e sua solução do problema de 2 corpos, Newton pôde explicar as três leis de Kepler no movimento de Marte e outros planetas. Quando ele passou a dar atenção ao sistema Sol-Terra-Lua, sua incapacidade de resolver esse problema de 3 corpos o fez comentar ao astrônomo John Machin que “sua cabeça nunca havia doído como em seus estudos sobre a lua”<sup>1</sup>. Em 1890, Poincaré mostrou que o problema de 3 corpos completo é um exemplo de dinâmica caótica que não pode ser resolvido por expressões algébricas e integrais.

Para o PR3C de acordo com [10, Seção 4.1], sejam  $\mu > 0$  e  $1 - \mu > 0$  as massas das primárias. Sejam  $(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$  as coordenadas da partícula infinitesimal num sistema de coordenadas circulares e  $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$  o momento conjugado a  $(q_1, q_2)$ . O sistema de coordenadas circulares é escolhido de modo que o corpo de massa  $\mu$  está sempre em  $(1 - \mu, 0)$  e o corpo de massa  $1 - \mu$  está em  $(-\mu, 0)$ . O hamiltoniano que governa o movimento da partícula infinitesimal nessas coordenadas é dado por

$$H(q, p) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + q_2 p_1 - q_1 p_2 - \frac{\mu}{\sqrt{(q_1 - 1 + \mu)^2 + q_2^2}} - \frac{1 - \mu}{\sqrt{(q_1 + \mu)^2 + q_2^2}}. \tag{6.1}$$

Considerando a expressão do auto-potencial dada por

$$U = \frac{\mu}{d_1} + \frac{1 - \mu}{d_2}, \tag{6.2}$$

onde  $d_i$  é a distância da partícula para a  $i$ -ésima primária, podemos escrever (6.1) como o sistema de equações

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= p_1 + q_2 \\ \dot{q}_2 &= p_2 - q_1 \\ \dot{p}_1 &= p_2 + \frac{\partial U}{\partial q_1} \\ \dot{p}_2 &= -p_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2}. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Observe que este é um sistema de células acopladas compatível com a rede da Figura 5.

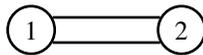


Figura 5: A mais simples rede de 2 células com múltiplas arestas.

Outra expressão importante é a do potencial generalizado do PR3C dada por

$$V = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + U(q_1, q_2). \tag{6.4}$$

<sup>1</sup>Manuscrito de Newton na coleção de Keynes, King’s College, Cambridge, UK. MSS 130.6, Livro 3; 130.5

Se assumirmos  $\xi_1$  e  $\xi_2$  como pontos críticos de (6.4), podemos estudar um possível equilíbrio introduzindo novas coordenadas com

$$\begin{aligned} u_1 &= q_1 - \xi_1, & v_1 &= p_1 - \xi_2, \\ u_2 &= q_2 - \xi_2, & v_2 &= p_2 - \xi_1. \end{aligned}$$

Essa mudança de coordenadas é claramente simplética, de modo que podemos aplicá-la ao hamiltoniano (6.1) e preservar sua estrutura. Expandindo em termos de segunda ordem nas novas variáveis, obtemos

$$H(u, v) = \frac{1}{2}(v_1^2 + v_2^2) + u_2 v_1 - u_1 v_2 - \frac{1}{2}(U_{q_1 q_1} u_1^2 + 2U_{q_1 q_2} u_1 u_2 + U_{q_2 q_2} u_2^2) + \dots$$

Não há termos lineares pois a expansão é realizada num equilíbrio e o termo constante foi omitido por não contriur para o sistema de equações. Lembrando que o sistema original não é completamente conservativo pois possui uma força que depende da velocidade da partícula, a chamada *força de Coriolis*. Contudo, no potencial generalizado em questão, podemos assumir a velocidade nula por se tratar de um equilíbrio e o sistema será conservativo. O hamiltoniano quadrático acima fornece a matriz hamiltoniana

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ U_{q_1 q_1} & U_{q_1 q_2} & 0 & 0 \\ U_{q_1 q_2} & U_{q_2 q_2} & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

Os autovalores dessa matriz determinam o comportamento do sistema linearizado. O polinômio característico é

$$\lambda^4 + (4 - V_{q_1 q_1} - V_{q_2 q_2})\lambda^2 + V_{q_1 q_1} V_{q_2 q_2} - V_{q_1 q_2}^2 = 0$$

onde as derivadas parciais são

$$\begin{aligned} V_{q_1 q_1} &= 1 + (1 - \mu) \frac{3(q_1 + \mu)^2 - d_1^2}{d_1^5} + \mu \frac{3(q_1 + \mu - 1)^2 - d_2^2}{d_2^5} \\ V_{q_1 q_2} &= 3q_1 q_2 \left( \frac{1 - \mu}{d_1^5} + \frac{\mu}{d_2^5} \right), \\ V_{q_2 q_2} &= 1 + (1 - \mu) \frac{3q_2^2 - d_1^2}{d_1^5} + \mu \frac{3q_2^2 - d_2^2}{d_2^5} \end{aligned}$$

e precisam ser calculadas a partir de pontos críticos.

Um resultado conhecido é que existem cinco pontos de equilíbrio, conhecidos por *pontos de Lagrange*: as três soluções de Euler que são colineares em relação às primárias ( $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ ) e as duas soluções de Lagrange que formam um triângulo equilátero com as primárias ( $L_4$  e  $L_5$ ). Enquanto as soluções de Euler são sabidamente instáveis, as soluções de Lagrange são estáveis. Lagrange pensou que essas soluções não tinham significância astronômica mas no Século XX centenas de asteróides, os Troianos, foram encontrados oscilando ao redor de  $L_4$  no sistema Sol-Júpiter, assim como outro conjunto, os Gregos, foi encontrado oscilando ao redor de  $L_5$ . Ou seja,

um grupo de asteróides, o sol e Júpiter formam aproximadamente um triângulo equilátero (veja a Figura 6).

Como as coordenadas de  $L_4$  foram estabelecidas para ser  $\xi_1 = \frac{1}{2} - \mu$  e  $\xi_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ , as derivadas parciais de  $V$  podem ser explicitamente calculadas. Elas são

$$V_{q_1q_1} = \frac{3}{4}, \quad V_{q_1q_2} = -\frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu), \quad V_{q_2q_2} = \frac{9}{4}. \tag{6.6}$$

O polinômio característico de (6.5) assim torna-se

$$\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1 - \mu) = 0 \tag{6.7}$$

cujas raízes são

$$\lambda^2 = \frac{1}{2} \left( -1 \pm \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)} \right). \tag{6.8}$$

Quando a raiz quadrada acima é zero, obtemos o autovalor  $\pm i\sqrt{2}/2$  com multiplicidade 2. Isso ocorre para  $\mu = \mu_1 = (1 - \sqrt{69}/9)/2 \approx 0.0385$ , conhecida como *proporção de Routh*. Por simetria, o mesmo vale para  $1 - \mu_1$ . Também vemos que a matriz (6.5) não é diagonalizável.

O autovalor  $\pm i\sqrt{2}/2$ , por ser imaginário puro, produz uma bifurcação de Hopf hamiltoniana em  $L_4$ . Além disso, para parâmetros tais que  $0 < \mu < \mu_1$ , os autovalores são distintos números imaginários puros  $\pm i\omega_1, \pm i\omega_2$ , com  $0 < \omega_2 < \omega_1$ . Como  $\pm i\omega_2/\pm i\omega_1$  é menor que 1 em módulo, o Teorema do Centro de Lyapunov, assim como seu análogo para redes (Teorema 5.3), implica que existem famílias de órbitas periódicas surgindo de  $L_4$  com período próximo de  $2\pi/\omega_1$  para todo  $\mu$  tal que  $0 < \mu < \mu_1$ . Essa é a chamada *família de curto período*.

Defina agora  $\mu_r$  como o valor de  $\mu$  para o qual  $\omega_1/\omega_2 = r$ . Se  $0 < \mu < \mu_1$  e  $\mu \neq \mu_r$  para  $r = 1, 2, \dots$ , então o Teorema do Centro de Lyapunov implica na existência de uma família de

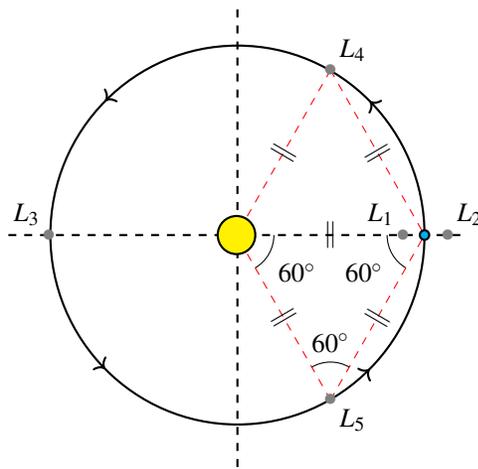


Figura 6: Ilustração dos cinco pontos de Lagrange com relação ao sistema Sol-Júpiter.

órbitas periódicas surgindo de  $L_4$  com período próximo de  $2\pi/\omega_2$ , a chamada *família de longo período* (veja a Figura 7).

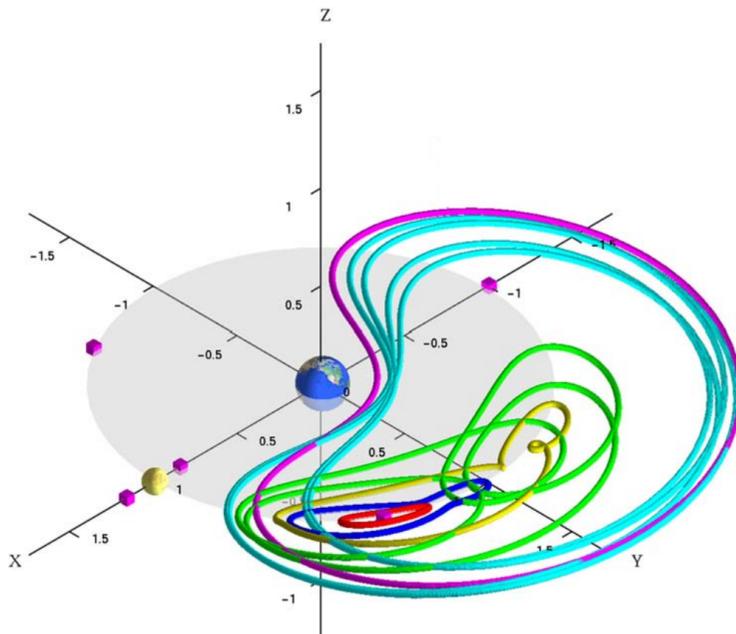


Figura 7: Ilustração da família de longo período em  $L_4$  no sistema Terra-Lua gerada pelo software AUTO. Reproduzida de [9].

## 7 CONCLUSÕES

Neste trabalho, relatamos uma conexão entre uma classe de sistemas dinâmicos e sua representação no formalismo de grupoides. Com a estrutura estabelecida, podemos construir redes hamiltonianas a partir de redes menores, o que pode ser útil para investigar redes complexas que também são hamiltonianas e possíveis relações espectrais além da matriz de adjacência. Vemos o quanto estudos de soluções periódicas do PR3C tem papel relevante em mecânica celeste. Esperamos que, com mais avanços nos estudos e novos resultados, a discussão sobre linearizações e bifurcações de equilíbrio feita aqui possa auxiliar em modelos e problemas sofisticados como o PR3C e outros sistemas complexos. Apesar de nos restringirmos aqui a redes homogêneas, uma abordagem para o contexto não-homogêneo foi proposta em [3]. Próximos trabalhos contemplarão redes de mapas acoplados e modelos logísticos como os sistemas baseados nas equações de Lotka-Volterra, por exemplo, e talvez uma releitura do fenômeno da homeostase [5] em outros campos da ciência.

**ABSTRACT.** The coupled cell formalism is a systematic way of representing and studying nonlinear coupled differential equations using directed graphs. We observed that only bidirectionally coupled digraphs can represent Hamiltonian systems. We present recent results

in networks of linearized coupled Hamiltonian systems with a discussion of the Hamiltonian Hopf theorem in this context. We show that the eigenspace in a bifurcation of codimension one of a synchronous equilibrium of a regular Hamiltonian network can be expressed in terms of the eigenspaces of the adjacency matrix of the associated digraph. We display a version of the Lyapunov center theorem for this type of network.

**Keywords:** hamiltonian systems, coupled cells, equilibrium bifurcation, synchrony subspace.

## REFERÊNCIAS

- [1] P.L. Buono, F. Laurent-Polz & J. Montaldi. Symmetric Hamiltonian Bifurcations. *London Math. Soc. Lecture Note*, Vol. **306** (2005), 357–402.
- [2] B.S. Chan, P.L. Buono & A. Palacios. Topology and bifurcations in Hamiltonian coupled cell systems. *Dynamical Systems*, **32**(1) (2017), 23–45. doi:10.1080/14689367.2016.1258039. URL <https://doi.org/10.1080/14689367.2016.1258039>.
- [3] P. Gandhi, M. Golubitsky, C. Postlethwaite, I. Stewart & Y. Wang. Bifurcations on Fully Inhomogeneous Networks. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, **19**(1) (2020), 366–411. doi:10.1137/18M1230736. URL <https://doi.org/10.1137/18M1230736>.
- [4] M. Golubitsky & R. Lauterbach. Bifurcations from Synchrony in Homogeneous Networks: Linear Theory. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, **8**(1) (2009), 40–75. doi:10.1137/070704873. URL <http://epubs.siam.org/doi/10.1137/070704873>.
- [5] M. Golubitsky, I. Stewart, F. Antoneli, Z. Huang & Y. Wang. Input-Output Networks, Singularity Theory, and Homeostasis. In O. Junge, O. Schütze, G. Froyland, S. Ober-Blöbaum & K. Padberg-Gehle (editors), “Advances in Dynamics, Optimization and Computation”. Springer International Publishing, Cham (2020), p. 31–65.
- [6] M. Golubitsky, I. Stewart & A. Török. Patterns of Synchrony in Coupled Cell Networks with Multiple Arrows. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, **4**(1) (2005), 78–100. doi:10.1137/040612634. URL <http://epubs.siam.org/doi/10.1137/040612634>.
- [7] M. Manoel & M. Roberts. Gradient systems on coupled cell networks. *Nonlinearity*, **28**(10) (2015), 3487. doi:10.1088/0951-7715/28/10/3487. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0951-7715/28/10/3487/meta>.
- [8] J.D. Meiss. “Differential Dynamical Systems”. Society for Industrial and Applied Mathematics (2007). doi:10.1137/1.9780898718232. URL <http://epubs.siam.org/doi/book/10.1137/1.9780898718232>.
- [9] A. Melo. “Redes de Sistemas Dinâmicos Acoplados com Estrutura Gradiente ou Hamiltoniana”. Dissertação de Mestrado, Instituto de Ciência e Tecnologia, Universidade Federal de São Paulo, São José dos Campos, SP (2020).
- [10] K. Meyer, G. Hall & D.C. Offin. “Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem”. Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, 2 ed. (2009). doi:10.1007/978-0-387-09724-4. URL <https://www.springer.com/gp/book/9780387097244>.

- [11] I. Stewart, M. Golubitsky & M. Pivato. Symmetry Groupoids and Patterns of Synchrony in Coupled Cell Networks. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, **2**(4) (2003), 609–646. doi:10.1137/S1111111103419896. URL <http://epubs.siam.org/doi/10.1137/S1111111103419896>.
- [12] J.C. Van Der Meer. “The Hamiltonian Hopf Bifurcation”. Springer Verlag, Berlin ; New York (1985).

**How to cite**

A. Melo. Bifurcações em Redes Hamiltonianas Acopladas e o Problema dos Três Corpos. *Trends in Computational and Applied Mathematics*, **25**(2024), e01571. doi: 10.5540/tcam.2024.025.e01571.

