

Análise de Métodos de Redução de Ruído por Limiar no Domínio Wavelet¹

W.C. SOARES², J. VIEIRA FILHO³, Departamento de Engenharia Elétrica, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, UNESP - Universidade Estadual Paulista, 15385-000 Ilha Solteira, SP, Brasil.

M.A.Q. DUARTE⁴, Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul - UEMS, 79540-000 Cassilândia, MS, Brasil.

F. VILLARREAL⁵, Departamento de Matemática, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, UNESP - Universidade Estadual Paulista, 15385-000 Ilha Solteira, SP, Brasil.

Resumo. Neste trabalho é apresentado uma análise e comparação entre os métodos de redução de ruído baseados em corte por limiar no domínio wavelet. O objetivo é apresentar os diversos métodos de redução de ruído, uma vez que nem todos são conhecidos na literatura especializada, indicando os mais eficientes.

Palavras-chave. Redução de ruído, limiares, transformada wavelet discreta.

1. Introdução

A redução de ruído é importante nas mais variadas aplicações que envolvem processamento de sinais. Existem diversos métodos para reduzir o ruído, alguns baseados na transformada de Fourier [9] e outros baseados na transformada wavelet discreta (DWT) [2, 4, 13]. As aplicações que envolvem a DWT ganharam destaque nos últimos anos devido a forma que esta transformada atua no sinal em processamento [12]. Os métodos mais aplicados no domínio wavelet são os métodos de redução por limiar, isto é, coeficientes do sinal transformado que têm valor absoluto abaixo de um determinado valor são eliminados ou reduzidos [2, 5]. A vantagem da transformada wavelet está no fato de que no domínio transformado vários coeficientes são irrelevantes na reconstrução do sinal, de forma que a eliminação destes não afeta a reconstrução perfeita do sinal [10], este é o princípio básico da compressão de sinais no domínio wavelet [6]. Quando se trata de redução de ruído, o limiar é

¹Os autores agradecem ao suporte financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

²wendelsoares@aluno.feis.unesp.br

³jozue@dee.feis.unesp.br

⁴marco@uems.br

⁵villa@mat.feis.unesp.br

multiplicado por um fator baseado na potência do ruído, causando assim a redução ou eliminação do mesmo [7]. Nos dois casos, a eficiência dos métodos de limiar no domínio wavelet se justifica pela eliminação dos coeficientes redundantes do sinal transformado.

A literatura especializada apresenta diversos métodos de redução por limiar, cada um com suas vantagens e desvantagens. Este trabalho apresenta uma análise de alguns métodos de limiar conhecidos na literatura, entre eles os tradicionais *Hard* e *Soft thresholding* [4, 5]. Alguns amplamente usados nas aplicações que envolvem wavelets. A seção 2 apresenta o princípio básico da transformada wavelet discreta, na seção 3 são apresentados os métodos de limiares. Na seção 4 são apresentados os testes e análise destes métodos para um sinal com ruído aditivo e, finalmente na seção 5, as conclusões a respeito de tais métodos.

2. Transformada Wavelet Discreta

A Transformada Wavelet Discreta pode ser vista como uma técnica de janelamento instantânea, o que corresponde a uma filtragem [3, 12], muito útil no processamento de sinais não-estacionários. A Figura 1 apresenta um exemplo de Transformada Wavelet Discreta com dois níveis. O sinal de entrada, denominado $c_o[n]$, é passado através de dois filtros: o primeiro apresenta um filtro passa-baixa, com resposta ao impulso $h[n]$ e o segundo representa um filtro passa-alta, com resposta ao impulso $g[n]$. Após a filtragem, os sinais passam por uma dizimação no tempo (neste caso, uma sub-amostragem de segunda ordem) gerando as saídas $c_1[n]$, que representa as componentes de baixa frequência e $d_1[n]$, que representa as componentes de alta frequência. Do ponto de vista matemático, $c_1[n]$ contém os chamados coeficientes de aproximação e $d_1[n]$ os coeficientes de detalhes.

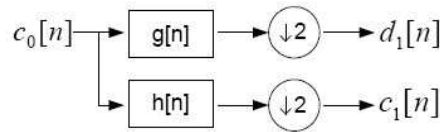


Figura 1: **Decomposição em duas faixas**

Considerando que o sinal de entrada é real, as equações (2.1) e (2.2) mostram as relações entre $c_o[n]$ e $c_1[n]$, $c_o[n]$ e $d_1[n]$.

$$c_1(k) = \sum_n \overline{h(n-2k)} c_o(n), \quad (2.1)$$

$$d_1(k) = \sum_n \overline{g(n-2k)} c_o(n). \quad (2.2)$$

A partir da obtenção dos sinais $c_1[n]$ e $d_1[n]$, são feitas as alterações de acordo com as aplicações (compressão, redução de ruído, etc.).

O sinal processado é obtido a partir de uma combinação adequada dos sinais $c_1[n]$ e $d_1[n]$, que é chamada de Transformada Wavelet Discreta Inversa [3]. A Figura

2 ilustra o processo de reconstrução. Inicialmente, adiciona-se um zero entre cada par de elementos consecutivos dos sinais $c_1[n]$ e $d_1[n]$. Em seguida, são efetuadas as convoluções de $c_1[n]$ com $h[n]$ e de $d_1[n]$ com $g[n]$. Essas duas operações em cascata representam uma sobreamostragem (no caso, de ordem 2).

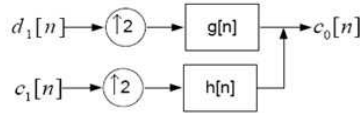


Figura 2: **Reconstrução em duas faixas**

O sinal reconstruído é a soma dos resultados das convoluções, conforme expresso na equação (2.3).

$$c_o(n) = \sum_k h(n - 2k)c_1(k) + \sum_k g(n - 2k)d_1(k). \quad (2.3)$$

Para processar um sinal de comprimento N , a decomposição é feita em $L = \log_2 N$ faixas, sendo L o número máximo de faixas em que o sinal pode ser decomposto [4].

3. Métodos de Limiar

Seja y uma seqüência de observação de comprimento finito do sinal x que está contaminado por ruído aditivo r , isto é, $y = x + r$.

Os sinais x e r são considerados processos aleatórios independentes e o objetivo é recuperar o sinal x a partir de y . Sendo \hat{y} a representação do sinal y no domínio wavelet, conforme as equações (2.1) e (2.2), um método de limiar atua eliminando ou atenuando os coeficientes de \hat{y} , cujos valores absolutos estão abaixo de um determinado valor limite $\lambda > 0$. O diagrama básico de um método de limiar é apresentado na Figura 3.

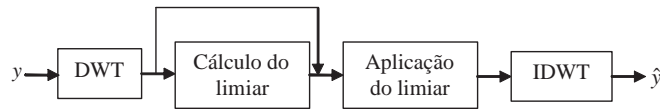


Figura 3: **Diagrama de um Método de Limiar**

Os dois primeiros métodos de limiar propostos são *Hard thresholding* e *Soft thresholding* [5]. As funções de transferência destes métodos são apresentadas respectivamente nas equações (3.1) e (3.2).

$$y_{thr} = \begin{cases} \hat{y} & \text{se } |\hat{y}| > \lambda \\ 0 & \text{se } |\hat{y}| \leq \lambda \end{cases}, \quad (3.1)$$

$$y_{thr} = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\hat{y}) (|\hat{y}| - \lambda) & \text{se } |\hat{y}| > \lambda \\ 0 & \text{se } |\hat{y}| \leq \lambda \end{cases} . \quad (3.2)$$

No caso do *limiar duro (Hard)* assume-se que os coeficientes wavelets que são menores que o limiar, são componentes ruidosos, ficando assim o sinal bem descrito pelos coeficientes wavelets maiores que o limiar. Assim, os coeficientes menores que o limiar são eliminados. Este método apresenta grande eficiência no caso de compressão de sinais [6]. No caso do *limiar suave (Soft)* assume-se que os componentes ruidosos são distribuídos igualmente em todos os coeficientes wavelets, assim todos os coeficientes wavelets são reduzidos pelo limiar. Além dos dois limiares básicos, *Hard* e *Soft*, existem outros limiares com algumas modificações. O primeiro deles chamado *Hard soft thresholding* [14], apresenta a função de transferência definida em (3.3):

$$y_{thr} = \begin{cases} \hat{y} & \text{se } |\hat{y}| > \lambda \\ \alpha \hat{y} & \text{se } |\hat{y}| \leq \lambda \end{cases} . \quad (3.3)$$

Na equação (3.3), $\alpha \in [0,1]$. Observa-se que para $\alpha = 0$ a equação (3.3) é semelhante à equação (3.1), concluindo que este limiar é uma variação do *Hard thresholding* evitando apenas a eliminação abrupta dos coeficientes que estão abaixo do limiar.

Um outro método, proposto em [11], chamado *Super soft thresholding*, cuja função de transferência é definida na equação (3.4), com α em $[0,1]$.

$$y_{thr} = \begin{cases} \hat{y} - \operatorname{sgn}(\hat{y}) (1 - \alpha) \lambda & \text{se } |\hat{y}| > \lambda \\ \alpha \hat{y} & \text{se } |\hat{y}| \leq \lambda \end{cases} . \quad (3.4)$$

Quando $\alpha = 0$ a equação (3.4) se torna semelhante à equação (3.2).

Além dos métodos citados anteriormente, em [14] são apresentados ainda outros dois métodos baseados em curvas de atenuação para \hat{y} , são eles: *Super super soft thresholding* e *Hard super soft thresholding*. As funções de transferência destes métodos são apresentadas, respectivamente, nas equações (3.5) e (3.6).

$$y_{thr} = \begin{cases} \hat{y} - \operatorname{sgn}(\hat{y})(1 - \alpha)\lambda & \text{se } |\hat{y}| > 1.5\lambda \\ \operatorname{sgn}(\hat{y}) (c|\hat{y}|^2 + b|\hat{y}| + a) & \text{se } 0.5\lambda < |\hat{y}| \leq 1.5\lambda \\ \alpha \hat{y} & \text{se } |\hat{y}| \leq 0.5\lambda \end{cases} , \quad (3.5)$$

sendo $a = (1 - \alpha)\lambda/8$, $b = 1.5\alpha - 0.5$ e $c = (1 - \alpha)/2\lambda$ os parâmetros para o polinômio em (3.5), cujo gráfico une os pontos $(0.5\lambda, \alpha\hat{y})$ e $(1.5\lambda, \hat{y} - \operatorname{sgn}(\hat{y})(1 - \alpha)\lambda)$. A inclinação das retas tangentes nos extremos da curva é igual a inclinação das duas retas em (3.5), nos mesmos pontos, respectivamente.

$$y_{thr} = \begin{cases} \hat{y} & \text{se } |\hat{y}| > 1.5\lambda \\ \operatorname{sgn}(\hat{y}) (e|\hat{y}|^4 + d|\hat{y}|^3 + c|\hat{y}|^2 + b|\hat{y}| + a) & \text{se } 0.5\lambda < |\hat{y}| \leq 1.5\lambda \\ \alpha \hat{y} & \text{se } |\hat{y}| \leq 0.5\lambda \end{cases} , \quad (3.6)$$

sendo $a = 0$, $b = 1$, $c = 4.5(\alpha - 1)/\lambda$, $d = 6(1 - \alpha)/\lambda^2$ e $e = 2(\alpha - 1)/\lambda^3$ os parâmetros do polinômio em (3.6), cujo gráfico une os pontos $(0.5\lambda, \alpha\hat{y})$, $(\lambda, 0.5\hat{y}(1 + \alpha))$ e $(1.5\lambda, \hat{y})$. A inclinação nos pontos extremos da curva é igual a inclinação das duas retas nos mesmos pontos.

A equação (3.7) apresenta a função de transferência do método *Semi-soft thresholding*, também conhecido como *Firm thresholding* [8]. Neste método, dois limiares são usados λ_1 e λ_2 , sendo que λ_2 é dependente de λ_1 . É assumido, geralmente, $\lambda_2 = \sqrt{2}\lambda_1$. Este método é vantajoso sobre os métodos apresentados nas equações (3.1) e (3.2) devido a variância e ponderação do ruído estimado para os coeficientes de \hat{y} que têm valores absolutos entre λ_1 e λ_2 .

$$y_{thr} = \begin{cases} \hat{y} & \text{se } |\hat{y}| > \lambda_2 \\ \text{sgn}(\hat{y}) \frac{\lambda_2(|\hat{y}| - \lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} & \text{se } \lambda_1 \leq |\hat{y}| \leq \lambda_2 \\ 0 & \text{se } |\hat{y}| < \lambda_1 \end{cases} \quad (3.7)$$

O último método apresentado é o *Sigmoidal thresholding* [7], este método atenua os coeficientes que estão abaixo do limiar usando a função sigmóide apresentada na equação (3.8). Sua vantagem sobre os demais é que esses coeficientes são atenuados por um fator dependente de seus próprios valores conforme apresentado na equação (3.9).

$$\text{Sigmoide}(x) = \frac{1 - \exp(-\gamma x)}{1 + \exp(-\gamma x)}, \quad (3.8)$$

$$y_{thr} = \begin{cases} \hat{y} & \text{se } |\hat{y}| > \lambda \\ \hat{y} \cdot |\text{sigmoide}(\hat{y})| & \text{se } |\hat{y}| \leq \lambda \end{cases} \quad (3.9)$$

Na equação (3.8), γ controla a inclinação da função sigmóide.

As Figuras 4 e 5 apresentam as características de entrada e saída dos métodos de limiares apresentados.

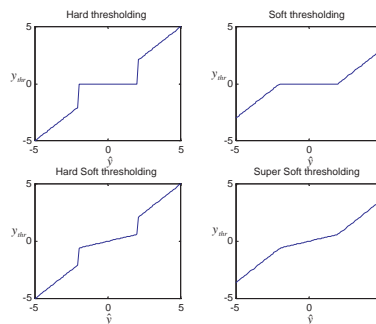


Figura 4: Funções de Transferência dos Métodos de Limiar (1)

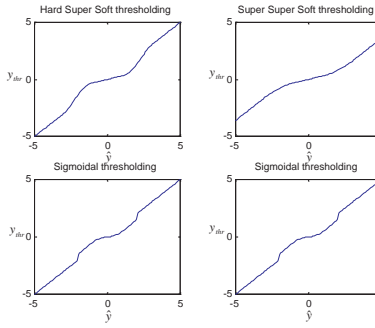


Figura 5: **Funções de Transferência dos Métodos de Limiar (2)**

Neste trabalho, o limiar λ usado nos testes, da próxima seção, é o limiar universal proposto por Donoho e Johnstone [5], que para um sinal de comprimento N é calculado da seguinte forma: $\lambda = \sigma \sqrt{2 \log_{10}(N)}$ sendo que σ representa a estimativa do ruído e é dado por: $\sigma = \text{mediana}(|\hat{y}|) / 0.6745$. A escolha deste limiar se deve ao fato do mesmo ser muito utilizado na literatura especializada [7]. Além dos métodos citados nesta seção, o método *Hard thresholding* será implementado usando o limiar bayesiano proposto por [1]. Para um sinal ruidoso y e sua saída estimada \hat{y} , o limiar *Bayesiano* é calculado da seguinte forma: $\lambda_{Bayes} = \frac{\sigma^2}{\sigma_y}$, sendo σ^2 a variância da saída estimada \hat{y} e σ_y o desvio padrão do sinal ruidoso y .

4. Testes e Análises

Para análise da aplicação dos métodos mencionados na seção anterior foram usados três sinais de 128 amostras cada um. O primeiro trata-se de dois períodos de uma senóide, escolhido por ser uma onda pura o que evidenciaria mais a eficiência ou deficiência do método aplicado, o segundo é um sinal Doppler, um dos sinais usados para testes na proposta original de Donoho e Johnstone [4], [5] e o terceiro é um trecho de um sinal de voz, pois este tipo de sinal é alvo freqüente de métodos de redução de ruído baseados na transformada wavelet discreta [7]. Para o processamento dos sinais foi usada a wavelet Daubechies 5 (db5), considerando que essa tem número de momentos nulos suficiente para evidenciar detalhes dos sinais e para propiciar uma boa reconstrução dos mesmos [3]. O número de níveis usado na aplicação da DWT foi 3, pois os métodos de limiares atuam mais nas faixas de altas freqüências, isto é, onde os coeficientes no domínio wavelet são menores. Assim, aumentando o número de níveis da DWT não aumentaria o número de coeficientes eliminados do sinal ruidoso. A escolha da wavelet e o número de níveis da DWT foram feitos depois de inúmeros testes para se chegar ao melhor conjunto de parâmetros ao se passar o sinal do domínio do tempo para o domínio wavelet. A DWT e cada um dos métodos testados foram implementados usando o software MATLAB.

Para testar a eficiência dos métodos, os sinais originais foram contaminados por ruído branco, ruído gaussiano de média 0 e variância 1, conforme ilustra a Figura

6.

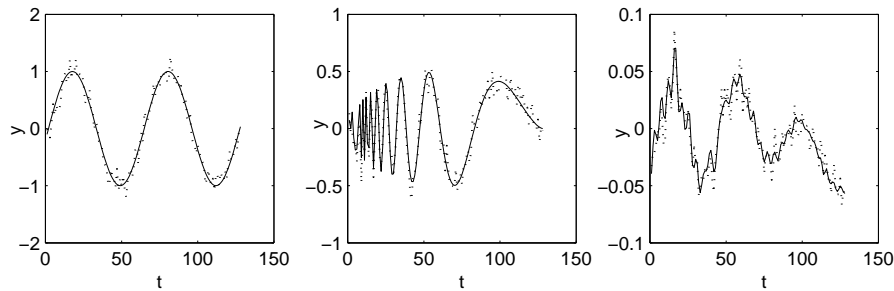


Figura 6: Sinais Originais e Ruidosos

Para comparação dos métodos foi usado apenas uma medida, que é o erro entre o sinal limpo e o sinal processado. Este erro é calculado baseado na energia de cada um dos sinais, sinal original e sinal após a eliminação do ruído (sinal processado). Considerando x o sinal original, \hat{x} o sinal processado e n o número de amostras de cada um dos sinais, o erro é calculado da seguinte forma:

$$Erro(x, \hat{x}) = \frac{\sum_{i=1}^n [x_i^2 - \hat{x}_i^2]}{\sum_{i=1}^n [x_i^2]} \cdot 100\%. \quad (4.1)$$

Os erros entre os sinais ruidosos e os sinais originais apresentados na Figura 6 são o seguinte: 26,2%, para a Senóide, 25,9% para o sinal Doppler e 31,2% para o sinal de voz. Na Tabela 1 são apresentados os erros entre os sinais originais e processados para cada um dos métodos apresentados.

Tabela 1: Erro (%) do sinal processado.

Métodos Thresholding	Senóide	Doppler	Voz
Hard	2,1	4,4	4,4
Soft	2,9	60,2	55,5
Hard Soft	5,8	3,3	3,1
Super Soft	21,0	45,8	41,7
Hard Super Soft	6,6	4,9	3,9
Super Super Soft	20,9	45,4	41,4
Semi-soft	2,4	16,5	42,0
Sigmoidal	2,0	4,4	4,4
Hard Bayesiano	2,5	4,4	4,9

Nas Figuras 7 a 9 são apresentados os sinais originais e processados apenas para os métodos que obtiveram melhores resultados da Tabela 1 para cada um dos três sinais. Em cada figura, a curva que apresenta a linha contínua representa o sinal original e a linha pontilhada, o sinal processado.

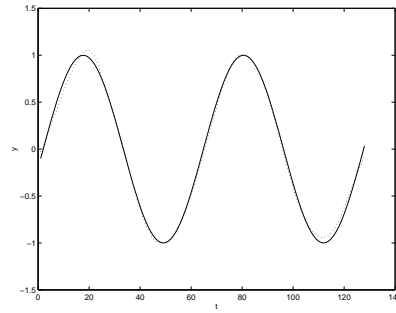


Figura 7: Senóide processada pelo método *Sigmoidal Thresholding*

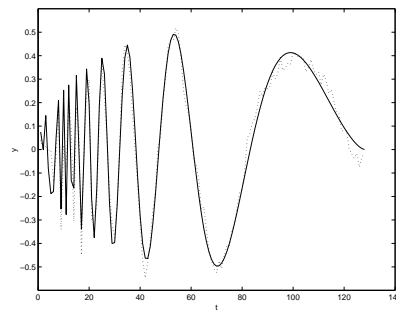


Figura 8: Doppler processado pelo método *Hard Soft Thresholding*

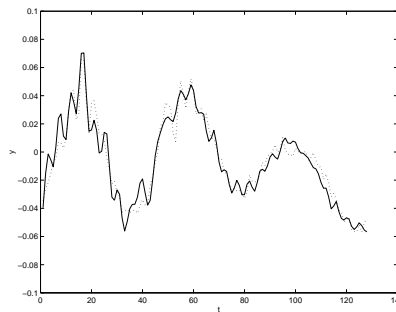


Figura 9: Trecho de voz processado pelo método *Hard Soft Thresholding*

4.1. Análises

Conforme se observa na Tabela 1 os métodos do tipo *Hard* e *Sigmoidal* foram os mais eficazes no processamento dos três sinais usados para testes. Isto se justifica porque estes métodos não alteram os coeficientes que estão acima do limiar. O método *Sigmoidal* ainda é vantajoso sobre os demais pelo fato de que este não

elimina completamente os coeficientes que estão abaixo do limiar, como é feito no *Hard* e também no *Semi-soft*, ele apenas atenua estes coeficientes. Porém, esta atenuação é dependente do valor do próprio coeficiente, pois este é atenuado pela sua sigmóide, isto é, a função sigmóide é calculada para este coeficiente e multiplicada pelo mesmo. Os métodos do tipo *Soft* apresentam erros relativamente grandes para os sinais Doppler e voz, isto acontece porque estes sinais têm a maior parte da energia concentrada em baixas frequências, exatamente onde se localizam os coeficientes cujos valores absolutos estão acima do limiar. Como estes métodos modificam os coeficientes que estão acima do limiar, causam fortes distorções nesses sinais.

A eficiência de um método de limiar se deve ao fato de que o sinal transformado \hat{y} apresenta coeficientes considerados redundantes na reconstrução do sinal y , estes coeficientes geralmente são menores que o limiar e por isso são eliminados ou atenuados dependendo do método aplicado. Porém, quando o ruído é adicionado ao sinal, muitos coeficientes redundantes assumem valores acima do limiar, além de que a introdução do ruído causa a inversão de fase de outros coeficientes. Assim, na aplicação do limiar muitos coeficientes que deveriam ser eliminados acabam sendo preservados, devido ao ruído presente nos mesmos, causando excesso de ruído no sinal processado. Esta é a grande deficiência dos métodos de limiar, quando aplicados com o objetivo de reduzir ruído. Uma alternativa para este problema seria a criação de uma função de atenuação baseada na relação sinal/ruído (SNR) do sinal ruidoso. Esta função geraria um vetor de comprimento igual ao do sinal que está sendo processado, onde cada componente traria informações do ruído presente nas respectivas componentes do sinal ruidoso. E por fim, este vetor funcionaria como filtro para o sinal ruidoso. Naturalmente, este processo não caracterizaria um método por limiar.

5. Conclusões

Neste trabalho foram apresentados vários métodos de redução de ruído por limiar no domínio wavelet. Para análises desses métodos foram usados três sinais curtos, porém de grande utilidade para se testar a eficiência dos métodos. Dentre os métodos testados aqueles que não são do tipo *Soft* tiveram maior eficiência, pois os métodos do tipo *Soft* atenuam os coeficientes que estão acima do limiar, o que acaba reduzindo a amplitude do sinal reconstruído. Os melhores resultados foram apresentados pelos métodos *Sigmoidal* utilizando a senóide e *Hard Soft* para os outros dois tipos de sinais (Doppler e Voz). Esta vantagem para estes dois métodos se deve ao fato de que nenhum dos dois eliminam totalmente os coeficientes que estão abaixo do limiar, mas simplesmente os atenua.

Em geral, a escolha do método a ser usado dependerá do tipo de sinal que está sendo tratado. Os métodos que fazem a eliminação direta dos coeficientes que estão abaixo do limiar são mais indicados para o caso de compressão de sinais, enquanto que os métodos que apenas os atenuam são mais úteis na redução de ruído, principalmente no caso de sinais de voz, onde a eliminação de coeficientes pode causar distorções graves no sinal processado.

Abstract. This work presents an analysis and comparison of thresholding methods in the wavelet domain. The objective is to present several denoising methods, because some of them are not known in the specialized literature, indicating the most efficient.

Referências

- [1] V. Balakrishnan, N. Borges, L. Parchment, “Wavelet Denoising and Speech Enhancement”, Spring, 2006.
- [2] K. Dae-Sung, C. Jung-Go, R. Geun-Taek, B. Mun-Seob, B. Hyeon-Deok, Noise reduction using coefficients smoothing wavelet transform, in “International Conference on Signal Processing Applications and Technology, (ICSPAT-2002)”, pp. 29-33, San Jose California, 2002.
- [3] I. Daubechies, “Ten Lectures on Wavelets”, SIAM, 1992.
- [4] D.L. Donoho, De-noising by soft-thresholding, *IEEE Transactions on Information Theory*, **41**, No. 3 (1995), 613-627.
- [5] D.L. Donoho, I.M. Johnstone, Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage *Biometrika*, **81**, No. 3, (1994), 425-455.
- [6] M.A.Q. Duarte, L.C.O. de Oliveira, F. Villarreal, L.A. Díaz, Compressão de sinais elétricos usando a transformada de wavelet, *TEMA - Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, **4**, No. 1 (2003), 21-30.
- [7] M.A.Q. Duarte, “Redução de Ruído em Sinais de Voz no Domínio Wavelet”, Tese de Doutorado, FEIS, UNESP, SP, 2005.
- [8] H.Y. Gao, A. Bruce, Waveshrink with firm shrinkage, *Statistica Sinica*, **7**, (1997), 855-874.
- [9] J. Vieira Filho, “Redução de Ruído em Sinais de Voz nos Sistemas Rádio Móveis Veiculares”, Tese de Doutorado, FEEC-DC, UNICAMP, Campinas, SP, 1996.
- [10] Y. Nievergelt, “Wavelets Made Easy”, Birkhauser, Boston, 1999.
- [11] F. Nordström, “Time and Frequency Dependent Noise Reduction Speech Signals”, Master thesis, Department of Mathematical Statistics, Lund Institute of Technology, Lund, Sweden, 2002.
- [12] O. Rioul, M. Vetterli, Wavelets and signal processing, *Signal Processing Magazine IEEE*, **8**, No. 4 (1991), 14-38.
- [13] H. Sheikhzadeh, H.R. Abutalebi, An improved wavelet-based speech enhancement system, em “Eurospeech 2001”, pp. 1855-1858, 2001.
- [14] H. Storm, “Noise reduction of speech signals with wavelets”, Technical Report No. 1998-02/ISSN 0347-2809, Department of Mathematics, Chalmers University of Technology and Gothenburg University, Gothenburg, Sweden, 1998.